PC* — mathématiques **jeudi 26 janvier 2023**
Devoir surveillé n° 5 — piste bleue **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Questions de cours et calculs

Question 1. Donner la définition d'un vecteur propre d'un endomorphisme.

Question 2. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Question 3. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Question 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Question 5. Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $f'' + 6f' + 9f = 0$.

Question 6. On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$.

Trouver une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$.

Problème 1 — Intégrales de Fresnel

On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est égale à $\sqrt{\pi}$.

Partie I

On définit les fonctions $h : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}$ et $\mathrm{H} : x \mapsto \displaystyle\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Question 7. Justifier que la fonction H est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.

Question 8. Montrer que la fonction H est impaire.

Question 9. Démontrer que la fonction h est développable en série entière. On précisera son développement en série entière ainsi que le domaine de validité.

Question 10. Démontrer que la fonction H est développable en série entière. On précisera son développement en série entière ainsi que le domaine de validité.

Question 11. Pour tout $x > 0$, justifier l'égalité $\mathrm{H}(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

Question 12. Pour tout $x > 4\pi^2$, en déduire l'égalité $\mathrm{H}(x) - \mathrm{H}(\sqrt{2\pi}) = -\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}}{2x} + \dfrac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2\pi}} - \dfrac{\mathrm{i}}{4}\displaystyle\int_{2\pi}^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{u^{3/2}}\,\mathrm{d}u$.

Question 13. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Partie II

On considère un élément z de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. On pose $a=\mathrm{Re}(z)$ et $b=\mathrm{Im}(z)$.

On définit les fonctions $\alpha : t \mapsto \dfrac{1}{t-z}$ et $\beta : t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln((t-a)^2+b^2)+\mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{t-a}{b}\right)$.

Question 14. Vérifier l'égalité $\beta'=\alpha$.

Question 15. Décomposer en éléments simples la fonction rationnelle $\gamma : t\mapsto \dfrac{1}{t^2-z^2}$.

Question 16. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction γ.

Question 17. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2-z^2}$ est convergente et qu'elle vaut $\dfrac{\mathrm{i}\pi}{z}\times\text{signe(b)}$.

Partie III

Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, on pose $f(x,t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2(t^2-\mathrm{i})}}{t^2-\mathrm{i}}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $g(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t)\ \mathrm{d}t$.

Question 18. Montrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Question 19. À l'aide des résultats de la partie II, calculer $g(0)$.

Question 20. À l'aide du théorème de convergence dominée à paramètre continu, justifier que la fonction g a une limite nulle en $+\infty$ et en $-\infty$.

Question 21. Démontrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Question 22. Pour tout $x>0$, justifier l'égalité $g'(x)=-2\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}$.

Question 23. Pour tout $x>0$, en déduire l'égalité $g(x)=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})-2\sqrt{\pi}\mathrm{H}(x)$.

Question 24. En déduire les valeurs des intégrales suivantes

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\ \mathrm{d}t,\quad \int_0^{+\infty}\cos(t^2)\ \mathrm{d}t,\quad \int_0^{+\infty}\sin(t^2)\ \mathrm{d}t.$$

Problème 2 — Étude d'une série de fonctions

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in]-1,1[$, on pose $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1-x^n}$.

Question 25. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$.

Question 26. Justifier que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $]-1,1[$.

Question 27. Montrer que pour tout $a\in]0,1[$, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[-a,a]$.

Question 28. Montrer que la fonction $f : x\mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{1-x^n}$ est continue sur $]-1,1[$.

Question 29. Montrer que la fonction f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et préciser les coefficients de son développement en série entière.
