PC* — mathématiques **jeudi 26 janvier 2023**
Devoir surveillé n° 5 — piste rouge **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Problème II

On fixe un nombre complexe z tel que $z \neq 1$ et $|z| \leqslant 1$. On définit la fonction

$$\mathrm{L} : t \mapsto \int_0^t \frac{z}{1 - uz}\, \mathrm{d}u.$$

Question 24. Montrer que la fonction L est définie sur $[0, 1]$ et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on donnera une expression de la fonction $\mathrm{L}^{(n)}$.

Question 25. Pour tout $t \in]0, 1]$, justifier l'inégalité $1 - t < |1 - tz|$.

Question 26. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{1-t}{1-tz}\right|^n \mathrm{d}t$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Question 27. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}}\, \mathrm{d}t$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Question 28. Grâce à une formule de Taylor, en déduire que $\mathrm{L}(1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n}$.

Question 29. Montrer que la fonction $\gamma : (t, u) \mapsto |1 + u\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}|$, définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, est continue.

Question 30. Pour tout $a \in]0, \pi[$, montrer l'existence d'un nombre réel $m_a > 0$ tel que

$$\forall (t, u) \in [-a, a] \times [0, 1], \quad |1 + u\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| \geqslant m_a.$$

Question 31. Montrer que la fonction $\mathrm{F} : t \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1 + u\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\, \mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$.

On donnera une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale à paramètre.

Question 32. Pour tout $t \in]-\pi, \pi[$, prouver l'égalité $\mathrm{F}'(t) = -\dfrac{1}{2}\tan(t/2) + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

Question 33. En déduire la valeur de $\mathrm{F}(t)$ pour tout $t \in]-\pi, \pi[$.

Question 34. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Montrer l'existence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(n\theta)}{n}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$, et préciser leur valeur.
