Exercice 1. (**) Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose

$$\mathrm{A} = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} \mathrm{A}_n.$$

1. On suppose que la série $\sum \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ est convergente. Prouver que $\mathbb{P}(\mathrm{A})$ est nul.

2. On suppose que les A_n sont mutuellement indépendants et que la série $\sum \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ est divergente. On veut prouver que $\mathbb{P}(\mathrm{A})$ vaut 1.

Pour tout p dans $\mathbb{N}$, on introduit l'événement $\mathrm{I}_p = \bigcap\limits_{n\geqslant p} \overline{\mathrm{A}_n}$.

a. Pour tout $x \geqslant 0$, prouver l'inégalité $1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

b. Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit un entier $r \geqslant p$. Prouver l'inégalité $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{r\geqslant n\geqslant p} \overline{\mathrm{A}_n}\right) \leqslant \exp\left(-\sum\limits_{r\geqslant n\geqslant p} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)\right)$.

c. En déduire que I_p est de probabilité nulle.

d. Conclure. (On a alors démontré le *lemme de Borel-Cantelli.)*

3. On fixe p dans $]0, 1[$ et on considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$.

On fixe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ ainsi qu'un k-uplet $(a_1, \ldots, a_k)$ dont les termes valent 0 ou 1. Le but de cette question est de montrer que ce motif apparaît presque sûrement dans la suite $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement

$$\mathrm{A}_n = \bigcap_{i=1}^{k} (\mathrm{X}_{nk+i} = a_i).$$

a. Montrer que les A_n sont mutuellement indépendants.

b. Conclure à l'aide du lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 2. **Formule de Wald (**)**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur cet espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes ayant la même loi que X.

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, que l'on suppose indépendante des X_n.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $\mathrm{S}(\omega) = \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}(\omega)} \mathrm{X}_n(\omega)$.

On note en particulier que S prend la valeur 0 lorsque N vaut 0.

a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer l'ensemble $(\mathrm{S} = k)$ au moyen d'événements faisant intervenir N et certains X_n. En déduire que S est une variable aléatoire.

b. Exprimer la loi de S.

c. Pour tout $t \in [0, 1]$, montrer les égalités

$$\mathrm{G_S}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{N} = n)\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t) \quad \text{puis} \quad \mathrm{G_S}(t) = \mathrm{G_N}(\mathrm{G_X}(t)).$$

d. On suppose que N et X sont d'espérance finie. Montrer alors que S est d'espérance finie et exprimer son espérance.

Exercice 3. (**) Soit $f : [0,+\infty[\to]0,+\infty[$ une fonction. On suppose que f est décroissante et qu'elle vérifie la relation
$$\forall(u,v)\in[0,+\infty[^2,\quad f(u+v)=f(u)\times f(v).$$

Le but de cet exercice est de prouver l'identité
$$\forall u\in[0,+\infty[,\quad f(u)=f(1)^u.$$

a. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout x dans $[0,+\infty[$, prouver la relation $f(nx)=f(x)^n$.

b. Pour tout $q\in\mathbb{Q}_+$, prouver la relation $f(q)=f(1)^q$.

c. Conclure.

Problème II — Processus de Poisson (**)

On considère un système mécanique dans lequel surviennent des pannes. On modélise l'occurrence des pannes comme suit. Pour tout t dans $[0,+\infty[$, le nombre de pannes qui se produisent dans l'intervalle temporel $[0,t]$ est une variable aléatoire N_t à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère que le système est réparé instantanément après chaque panne. On considère donc ici une famille $(\mathrm{N}_t)_{n\in[0,+\infty[}$ de variable aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$. Remarquons que la modélisation impose que pour tout t positif et tout $u\geqslant t$, la variable aléatoire $\mathrm{N}_u-\mathrm{N}_t$ soit à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On fait les hypothèses suivantes :

- la variable aléatoire N_0 est égale à 0 ;
- pour tout $t>0$, le nombre $\mathbb{P}(\mathrm{N}_t=0)$ appartient à $]0,1[$;
- pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout $(n+1)$-uplet $(t_0,\dots,t_n)$ croissant d'éléments de $[0,+\infty[$, les variables aléatoires $\mathrm{N}_{t_0},\mathrm{N}_{t_1}-\mathrm{N}_{t_0},\dots,\mathrm{N}_{t_n}-\mathrm{N}_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes (*hypothèse d'accroissements indépendants*) ;
- pour tout couple (s,t) d'éléments de $[0,+\infty[$ soumis à la condition $0\leqslant s<t$, la variable aléatoire $\mathrm{N}_t-\mathrm{N}_s$ a la même loi que N_{t-s} (*hypothèse d'accroissements stationnaires*) ;
- le quotient $\mathbb{P}(\mathrm{N}_h>1)/h$ tend vers 0 quand h tend vers 0 par valeurs strictement positives.

1. Pour tout u dans $[0,+\infty[$, on note G_u la fonction génératrice de la variable aléatoire N_u, que l'on définit simplement sur l'intervalle $[0,1]$ par
$$\mathrm{G}_u(s)=\mathbb{E}(s^{\mathrm{N}_u}).$$

On fixe s dans $[0,1]$.

a. Pour tout couple (u,v) d'éléments de $[0,+\infty[$, prouver l'égalité $\mathrm{G}_{u+v}(s)=\mathrm{G}_u(s)\mathrm{G}_v(s)$.

b. Prouver que la fonction $t\mapsto \mathrm{G}_t(s)$ est décroissante sur $[0,+\infty[$.

c. Pour tout $u\geqslant 0$, prouver que $\mathrm{G}_u(s)$ est strictement positif. On pose alors $\theta(s)=-\ln(\mathrm{G}_1(s))$.

d. Pour tout u dans $[0,+\infty[$, prouver l'égalité $\mathrm{G}_u(s)=\mathrm{e}^{-u\theta(s)}$.

e. En déduire que le quotient $(\mathrm{G}_h(s)-1)/h$ tend vers $-\theta(s)$ quand h tend vers 0 par valeurs strictement positives.

2. Pour tout s dans $[0,1]$, prouver que le quotient
$$\frac{1}{h}\sum_{k=2}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{N}_h=k)(s^k-1)$$
tend vers 0 quand h tend vers 0 par valeurs strictement positives.

3. En déduire que le quotient $\mathbb{P}(\mathrm{N}_h=1)/h$ possède une limite finie quand h tend vers 0 par valeurs strictement positives. Cette limite est notée α.

De plus, pour tout s dans $[0,1]$, prouver l'égalité $\theta(s)=\alpha(1-s)$.

4. En considérant $\mathrm{G}_1(0)$, prouver que α est strictement positif.

5. Pour tout $u>0$, prouver que la variable aléatoire N_u suit la loi de Poisson de paramètre αu.
