Chapitre 16 — espaces euclidiens (suite et fin)

1 Isométries vectorielles

1.1 Définition et caractérisation

Une isométrie vectorielle d'un espace euclidien est un endomorphisme qui préserve la norme euclidienne. On parle aussi d'automorphisme orthogonal.

Caractérisation : ça équivaut à préserver le produit scalaire ; ça équivaut à envoyer une base orthonormée sur une base orthonormée. Stabilité par composition, par passage à l'inverse.

Groupe orthogonal O(E). Exemple : les symétries orthogonales.

Si un sous-espace vectoriel F est stable par une isométrie vectorielle, alors $\mathrm{F}^\perp$ est stable également.

1.2 Matrices orthogonales

Ce sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ canoniquement associées aux isométries vectorielles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Caractérisation : ce sont les matrices de passage entre deux bases orthonormales de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ou de n'importe quel espace euclidien de dimension n) ; ce sont les matrices dont les colonnes forment une base orthonormale

Caractérisation : ce sont les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la relation $\mathrm{M}^\mathrm{T} \times \mathrm{M} = \mathrm{I}_n$ (ou, de manière équivalente, la relation $\mathrm{M} \times \mathrm{M}^\mathrm{T} = \mathrm{I}_n$. Groupe orthogonal $\mathrm{O}(n)$, également noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Caractérisation matricielle des automorphismes orthogonaux.

Déterminant des matrices orthogonales. Groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n)$, également noté $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Orientation d'un espace vectoriel. Bases orthonormées directes.

1.3 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Classification des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$.

Mesure de l'angle d'une rotation d'un plan euclidien orienté. Écriture complexe d'une rotation.

1.4 Folklore

Inégalités $|a_{i,j}| \leqslant 1$ et $\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$. Les valeurs propres complexes sont de module 1. L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé et borné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A est une matrice orthogonale, alors les endomorphismes $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{AM}$ et $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{MA}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont des isométries.

2 Endomorphismes auto-adjoints (ou symétriques)

2.1 Définition et caractérisation

Définition d'un endomorphisme auto-adjoint. Caractérisation par la représentation matricielle dans une base orthonormée.

Projections orthogonales. Symétries orthogonales.

Si un sous-espace vectoriel F est stable par un endomorphisme symétrique, alors $\mathrm{F}^\perp$ l'est aussi.

Espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathrm{E})$. Isomorphisme avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

2.2 Réduction des matrices symétriques

Les espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux.

Les valeurs propres complexes d'une matrice symétrique réelle sont réelles.

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme symétrique est scindé sur $\mathbb{R}$.

Théorème spectral : tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Traduction matricielle : pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice orthogonale P telle que la matrice $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit diagonale.

Exemple d'une matrice symétrique complexe non diagonalisable.

2.3 Endomorphisme auto-adjoint positif

Soit f un endomorphisme auto-adjoint de E. Dire que f est positif signifie que

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad (x|f(x)) \geqslant 0.$$

On montre que ça équivaut à ce que les valeurs propres de f soient positives.

Matrice symétrique positive.

Ensembles $\mathcal{S}^{+}(\mathrm{E})$ et $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Bijection entre ces ensembles.

Complément : matrices de Gram.

2.4 Endomorphisme auto-adjoint défini positif

Soit f un endomorphisme auto-adjoint de E. Dire que f est défini positif signifie que

$$\forall x \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}, \quad (x|f(x)) > 0.$$

On montre que ça équivaut à ce que les valeurs propres de f soient strictement positives.

Matrice symétrique définie positive.

Ensembles $\mathcal{S}^{++}(\mathrm{E})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Bijection entre ces ensembles.

Complément : les matrices symétriques définies positives sont les matrices de Gram de familles libres.

2.5 Complément : racine carrée d'un endomorphisme auto-adjoint positif

Existence et unicité.