

# Chapitre 17 — fonctions de plusieurs variables

## 1 Fonctions à valeurs vectorielles

Dans ce paragraphe, on se donne un espace vectoriel réel  $E$  de dimension finie et une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$ , à valeurs dans  $E$ .

### 1.1 Continuité

Rappel : la continuité de  $f$  équivaut à celle de ses composantes relativement à une base de  $E$ .

### 1.2 Dérivabilité

Définition. Propriété : ça équivaut à la dérivabilité de ses composantes relativement à une base de  $E$ .

Vecteur vitesse, vecteur accélération.

Fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

### 1.3 Règles de calcul sur la dérivabilité

Si  $L$  est une application linéaire de  $E$  vers un espace vectoriel  $F$ , dérivation de  $L \circ f$ .

Si  $\varphi$  est une fonction à valeurs réelles d'une variable réelle, dérivation de  $f \circ \varphi$ .

Si  $B$  est une application bilinéaire sur  $E$ , à valeurs dans un espace vectoriel  $F$ , dérivation de  $t \mapsto B(f(t), g(t))$ . Cas particulier du produit scalaire.

Si  $M$  est une application  $p$ -linéaire sur  $E_1 \times \dots \times E_p$ , dérivation de  $t \mapsto M(f_1(t), \dots, f_p(t))$ . Cas particulier du déterminant.

## 2 Retour sur la continuité des fonctions

### 2.1 Quelques exemples de limites

Chacune des fonctions suivantes est définie et continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . On étudie l'existence d'une limite en l'origine.

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^3}{x^2 + y^2} \quad g : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad h : (x, y) \mapsto \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad i : (x, y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

### 2.2 Propriétés topologiques

Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé. Soit  $f$  une fonction continue de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $\alpha$  réel, l'ensemble

$$\{x \in E ; f(x) < \alpha\}$$

est ouvert et les ensembles

$$\{x \in E ; f(x) \leq \alpha\} \quad \text{et} \quad \{x \in E ; f(x) = \alpha\}$$

sont fermés.

Exemples : si  $E$  est de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel de  $E$  est fermé dans  $E$  ; si  $E$  est un espace préhilbertien, alors tout sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie est fermé dans  $E$ .

### 2.3 Théorème des bornes atteintes

Soit  $(E, N)$  un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit  $K$  une partie non vide, fermée et bornée de  $E$ .

Soit  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

La fonction  $f$  possède alors un maximum et un minimum sur  $K$ .

Exemple : la fonction  $x \mapsto (x|f(x))$  admet un maximum et un minimum sur la sphère unité d'un espace euclidien.

### 3 Dérivation

#### 3.1 Dérivées partielles

Dérivée d'une fonction en un point selon un vecteur. Notation  $D_v f(a)$ .

Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$ , à valeurs réelles.

Notations  $\partial_i f(a)$  et  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ .

#### 3.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  : en tout point, la fonction admet des dérivées partielles d'ordre 1 selon toutes les coordonnées et les fonctions  $\partial_i f$  sont toutes continues sur  $U$ . Gradient.

Stabilité par combinaison linéaire, par produit.

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  et  $g$  est une fonction d'une variable de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle qui contient  $f(U)$ , alors la fonction  $g \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ .

Développement limité à l'ordre 1. Interprétation géométrique. Unicité du développement limité.

La classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  implique la continuité.

#### 3.3 Différentielle

La différentielle de  $f$  au point  $a$  est la forme linéaire

$$df(a) : (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^p h_i \times \partial_i f(a) = (\nabla f(a)|h).$$

Le nombre  $df(a)(h)$  est aussi noté  $df(a) \cdot h$ .

#### 3.4 Règle de la chaîne

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$ . Soit  $\gamma$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$ , à valeurs dans  $U$ . La fonction  $f \circ \gamma$  est alors de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , de dérivée

$$t \mapsto df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = ((\nabla f)(\gamma(t))|\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^p \partial_i f(\gamma(t)) \gamma'_i(t).$$

Dérivation de fonctions de la forme  $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$ .

Cas des coordonnées polaires. Expression du gradient en coordonnées polaires.

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert convexe  $U$ . La fonction  $f$  est constante sur  $U$  si et seulement si son gradient est identiquement nul sur  $U$ .

#### 3.5 Dérivées partielles d'ordre deux

Définition. Notations  $\partial_{i,j}^2 f$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ .

Fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . Théorème de Schwarz.

Contre-exemple en l'absence de la classe  $\mathcal{C}^2$  : la fonction  $f$  définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin(x/y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Expression du laplacien en coordonnées polaires.

Matrice hessienne de la fonction  $f$  en un point  $a$ , notée  $H_f(a)$ . C'est une matrice symétrique par le théorème de Schwarz.

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

$$f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a)|h) + \frac{1}{2}(h|H_f(a)h) + o_{h \rightarrow 0}(h^2).$$

## 4 Extremums

Extremum global, extremum local.

Existence d'un extremum global d'une fonction continue sur un fermé borné.

Point critique.

Si une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  possède un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique.

Minimisation des fonctions de la forme  $(a, b) \mapsto \|\vec{y} - a\vec{x} - b\vec{n}\|^2$ . Régression linéaire.

Utilisation des coordonnées polaires : extremums de  $f : (x, y) \mapsto (3x+4y)e^{-x^2-y^2}$  et de  $g : (x, y) \mapsto (x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$ .

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$ . Soit  $a$  un point critique de  $f$  dans  $U$ .

- Si la matrice  $H_f(a)$  est définie positive, alors la fonction  $f$  admet en  $a$  un minimum local strict.
- Si la matrice  $H_f(a)$  n'est pas positive, alors la fonction  $f$  n'admet pas en  $a$  un minimum local (ni global).

Cas  $p = 2$  : le déterminant et la trace de  $H_f(a)$  donnent directement le signe des valeurs propres.

Exemple de la fonction  $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$  dans le cas  $p = 3$ .

## 5 Complément si on a le temps : équations aux dérivées partielles

### 5.1 Ordre un

Résolution de  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ , de  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$ , de  $\vec{\nabla} f = \vec{0}$ , de  $\frac{\partial f}{\partial x} = xf$ .

### 5.2 Ordre deux

Résolution de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ , de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ , de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ .