Régularité des fonctions

Exercice 1. (*) On pose $f(x,y) = 0$ si $y = 0$ et $f(x,y) = y + x\sin\left(\dfrac{1}{y}\right)$ sinon.

Montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ et $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ existent mais pas $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$.

Exercice 2. (*) On pose $f(x,y) = (x^2 - y^2)\ln(x^2 + y^2)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f(0,0) = 0$.

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 3. (*) On pose $f(x,y) = \dfrac{x^4 y}{x^4 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 4. (**) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $q(x,y) = \dfrac{1 + xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$.

a. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, simplifier l'expression $1 - q(x,y)^2$.

b. En déduire que la fonction $f : (x,y) \mapsto \operatorname{Arccos}(q(x,y))$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.

c. Sur un ensemble $\mathcal{D}$ à préciser, calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction f.

d. En déduire une simplification de l'expression $f(x,y)$. Interpréter géométriquement.

Exercice 5. (**) On considère la fonction dét, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, interprétée comme une fonction de n^2 variables.

a. Déterminer la différentielle de cette fonction en I_n.

b. Déterminer la différentielle de cette fonction en une matrice A quelconque.

Extremums

Exercice 6. (*) On définit de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ la fonction $f : (x,y) \mapsto xy(1 - x - y)$.

a. Représenter l'ensemble $\mathrm{D} = \{(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \ ; \ 1 - x - y \geqslant 0\}$.

b. Montrer que f admet sur D un maximum, que l'on déterminera.

Exercice 7. (*) Déterminer les extremums sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f : (x,y) \mapsto (x^2 - y^2)\exp(-x^2 - y^2)$.

Exercice 8. (*) Déterminer les extremums sur $[0,\pi]^2$ de la fonction $f : (x,y) \mapsto \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y)$.

Exercice 9. (*) Trouver les extremums de la fonction $f : (x,y) \mapsto (x-y)^2 - xy$ sur l'ensemble D défini par

$$\mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1\}.$$

Exercice 10. (**) On définit sur $[0,+\infty[^2$ une fonction f en posant $f(0,0) = 0$ et

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x+y)(1+x)(1+y)} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

a. Montrer que cette fonction est continue.

b. Trouver les points critiques de f dans l'ouvert $(]0,+\infty[)^2$.

c. Pour tout $(x,y) \in ([0,+\infty[)^2$ tel que $x + y \geqslant 8$, montrer la majoration $f(x,y) < 1/8$.

d. Déterminer les extremums de la fonction f sur $([0,+\infty[)^2$.

Exercice 11. (*) On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction $f : (x, y) \mapsto 3xy - x^3 - y^3$.

a. Montrer que f n'a pas d'extremums globaux.

b. Déterminer les points critiques de f.

c. Étudier la nature des points critiques de f.

Exercice 12. (**) Dans cet exercice, on identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ à ceux de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On se donne une matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et un vecteur B de $\mathbb{R}^n$. On définit la fonction

$$f : \mathrm{X} \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{X} - \mathrm{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{X}$$

de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

a. Exprimer le gradient de f.

b. Si A est symétrique définie positive, montrer que f possède un minimum et qu'il est atteint en un unique point.

c. (***) Montrer que f possède un minimum si et seulement si la matrice A est symétrique positive et B est dans l'image de A.

Exercices divers

Exercice 13. (**) On note Ω le complémentaire de l'origine dans $\mathbb{R}^2$ et on considère une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. On fixe α dans $\mathbb{R}$.

Dire que la fonction f est *positivement homogène* de degré α signifie qu'elle vérifie l'identité suivante

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \forall t \in]0, +\infty[, \qquad f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y).$$

Montrer que f est positivement homogène de degré α si et seulement si elle vérifie l'identité suivante

$$\forall (x, y) \in \Omega, \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y).$$

Exercice 14. (**) On note U l'ouvert $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ de $\mathbb{R}^n$. On se donne une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, à valeurs réelles, et on définit sur U la fonction

$$\mathrm{F} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f\left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right).$$

a. Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, exprimer la fonction $\partial^2\mathrm{F}/\partial x_i^2$.

b. En déduire une expression du laplacien de F, défini par $\Delta\mathrm{F} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2\mathrm{F}}{\partial x_i^2}$.

c. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction f pour que la fonction F soit harmonique (c'est-à-dire de laplacien nul).

Exercice 15. (**) Soit U un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathrm{U}, \mathbb{R})$.
Dire que f est *convexe* signifie que

$$\forall (x_0, x_1) \in \mathrm{U}^2, \quad \forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)x_0 + tx_1) \leqslant (1-t)f(x_0) + tf(x_1).$$

1. Montrer que f est convexe si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathrm{U}^2, \quad f(y) \geqslant f(x) + \mathrm{d}f(x) \cdot (y - x).$$

2. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{U}$, la matrice $\mathrm{H}_f(x)$ est positive.
