# Transformée de Legendre

## Partie I – transformée de Legendre des fonctions d'une variable

On considère un intervalle I non trivial de $\mathbb{R}$ et une fonction $f$ définie de I vers $\mathbb{R}$.

On note $\mathrm{J}(f)$ l'ensemble des nombres réels $p$ tels que la fonction $x \mapsto px - f(x)$ soit majorée sur I. Si l'ensemble $\mathrm{J}(f)$ n'est pas vide, on peut alors définir une fonction $g$ de $\mathrm{J}(f)$ vers $\mathbb{R}$ par

$$\forall p \in \mathrm{J}(f), \qquad g(p) = \sup_{x \in \mathrm{I}} \, (px - f(x)).$$

La fonction $g$ ainsi définie est *la transformée de Legendre* de la fonction $f$. On la note $\mathscr{L}(f)$.

### I.A. Exemples

Dans les trois cas suivants, déterminer la transformée de Legendre $g = \mathscr{L}(f)$ — on précisera l'ensemble $\mathrm{J}(f)$ — et tracer le graphe de la fonction $g$.

**I.A.1.** On fixe $k$ dans $]0, +\infty[$ et on définit $f : x \mapsto kx^2$ de $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**I.A.2.** On définit $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ de $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**I.A.3.** On définit $f : x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$ de $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

### I.B. Étude générale

On considère une fonction $f$ définie sur un intervalle I non trivial de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. On suppose que l'ensemble $\mathrm{J}(f)$ n'est pas vide.

**I.B.1.** Montrer que l'ensemble $\mathrm{J}(f)$ est un intervalle : on prouvera que pour tout couple $(a, b)$ d'éléments de $\mathrm{J}(f)$ et pour tout $t$ du segment $[0, 1]$, le nombre $(1 - t)a + tb$ appartient à $\mathrm{J}(f)$.

**I.B.2.** Montrer que la fonction $g = \mathscr{L}(f)$ est convexe sur l'intervalle $\mathrm{J}(f)$.

**I.B.3.** On suppose que l'intervalle I est inclus dans $\mathbb{R}_+$. Que peut-on dire des variations de la fonction $g = \mathscr{L}(f)$ ?

**I.B.4.** Même question si I est inclus dans $\mathbb{R}_-$.

### I.C. Transformée de Legendre d'une fonction à dérivée seconde strictement positive

On se donne un intervalle I non trivial et une fonction $f$ définie de I vers $\mathbb{R}$. On suppose que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que sa dérivée seconde est strictement positive :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad f''(x) > 0.$$

On sait, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'ensemble $f'(\mathrm{I})$ est un intervalle. On note $\alpha$ et $\beta$ les bornes de cet intervalle et on suppose que $\alpha$ est strictement inférieur à $\beta$ (le cas $\alpha = -\infty$ est envisageable, de même que le cas $\beta = +\infty$).

**I.C.1.** Montrer que la fonction $f'$ induit une bijection $\varphi$ de l'intervalle I sur l'intervalle $f'(\mathrm{I})$ et que la fonction $\varphi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

**I.C.2.** Montrer que l'intervalle $\mathrm{J}(f)$ contient l'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$. On pose $g = \mathscr{L}(f)$.

Montrer ensuite que pour tout $p$ dans $]\alpha, \beta[$, l'équation $g(p) = px - f(x)$ d'inconnue $x \in \mathrm{I}$ possède une unique solution. Cette unique solution sera notée $x(p)$ dans la suite.

Trouver une expression de la fonction $g = \mathscr{L}(f)$ à l'aide des fonctions $f$ et $\varphi^{-1}$.

**I.C.3.** Montrer que $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\alpha,\beta[$. Pour tout $p$ dans $]\alpha,\beta[$, exprimer $g'(p)$ à l'aide de $x(p)$.

**I.C.4.** Pour tout $p$ dans $]\alpha,\beta[$, on note $\mathrm{D}_p$ la droite

$$\mathrm{D}_p = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y = px - g(p)\}.$$

Pour tout $p$ dans $]\alpha,\beta[$, montrer que la droite $\mathrm{D}_p$ est tangente au graphe de la fonction $f$.

**I.C.5.** On note $\mathscr{H}$ l'ensemble des fonctions $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, à dérivée seconde strictement positive, telles que l'intervalle $f'(\mathbb{R})$ soit $\mathbb{R}$ tout entier :

$$\mathscr{H} = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ ; \ (\forall x \in \mathbb{R}, \ f''(x) > 0) \text{ et } (f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R})\}.$$

**a.** Montrer que $\mathscr{H}$ est stable par $\mathscr{L}$.

**b.** Pour toute fonction $f$ de $\mathscr{H}$, montrer l'égalité $\mathscr{L}(\mathscr{L}(f)) = f$.

**c.** Montrer que $\mathscr{L}$ est une bijection de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{H}$.

---

## Partie II - transformée de Legendre de certaines fonctions de plusieurs variables

On fixe un entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2 et on note E l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. On rappelle que ce produit scalaire associe à tout couple $(x,y)$ d'éléments de E le nombre

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

où l'on a noté $x = (x_1,\ldots,x_n)$ et $y = (y_1,\ldots,y_n)$.

Pour tout vecteur de E noté par une lettre minuscule, on note avec la lettre majuscule correspondante le vecteur colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui représente canoniquement ce vecteur. Par exemple, si l'on considère un vecteur $x = (x_1,\ldots,x_n)$ de E, alors on note X le vecteur colonne

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On rappelle alors l'identité classique $(x|y) = {}^t\mathrm{X} \cdot \mathrm{Y}$, valable pour tout couple $(x,y)$ d'éléments de E.

On considère une fonction $f$ définie de E vers $\mathbb{R}$.

On suppose que pour tout vecteur $p$ de E, la fonction $x \mapsto (p|x) - f(x)$, définie de E vers $\mathbb{R}$, est majorée. On définit alors la fonction $g = \mathscr{L}(f)$ de E vers $\mathbb{R}$ par

$$\forall p \in \mathrm{E}, \qquad g(p) = \sup_{x \in \mathrm{E}} \Big( (p|x) - f(x) \Big).$$

La fonction $\mathscr{L}(f)$ est *la transformée de Legendre* de la fonction $f$.

Pour tout le reste de la partie II, on fixe une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est une matrice symétrique et que ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

On associe à cette matrice A la fonction $f$ définie de E dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad f(x) = {}^t\mathrm{X} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{X}.$$

**II.A.** Dans cette question, on fixe un vecteur $p$ de E et on définit une fonction F de E dans $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad \mathrm{F}(x) = (p|x) - f(x).$$

Montrer l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ de E telle que pour tout vecteur $x$ de E, si l'on note $x = \sum_{i=1}^n y_i c_i$ la décomposition du vecteur $x$ dans la base $\mathcal{C}$ de E, alors $\mathrm{F}(x)$ s'écrit sous la forme

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{i=1}^n (q_i y_i - \lambda_i (y_i)^2),$$

où les $q_i$ et les $\lambda_i$ sont des constantes que l'on précisera.

En déduire que la fonction F est majorée sur E et qu'elle atteint sa borne supérieure.

On en déduit par conséquent que la transformée de Legendre de la fonction $f$ est bien définie.

**II.B.** Avec les mêmes notations qu'à la question précédente, exprimer la transformée de Legendre $g = \mathscr{L}(f)$. On montrera en particulier qu'il existe une matrice B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, que l'on exprimera en fonction de la matrice A, vérifiant

$$\forall p \in \mathrm{E}, \qquad g(p) = {}^t\mathrm{P} \cdot \mathrm{B} \cdot \mathrm{P},$$

où P désigne, rappelons-le, le vecteur colonne canoniquement associé au vecteur $p$.

Que dire de la fonction $\mathcal{L}(\mathcal{L}(f))$ ?

**II.C.** Pour tout $x$ dans E et tout $t$ réel, montrer l'égalité

$$f(tx) = t^2 f(x).$$

En déduire l'identité suivante

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 2f(x).$$

**II.D.** Montrer que la fonction F atteint sa borne supérieure en un unique point $x(p)$ de E.

Montrer que $x(p)$ est un point critique de la fonction F puis prouver les deux égalités suivantes

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x(p)) = p, \qquad g(p) = f(x(p)).$$

---

## Partie III – un problème d'optimisation

Dans cette partie, on fixe à nouveau un entier $n$ supérieur ou égal à 2 et on note à nouveau E l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. De plus, on introduit la notation $|| \ ||$ pour désigner la norme euclidienne de cet espace euclidien.

On fixe un vecteur $p$ de E ainsi qu'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, que l'on suppose symétrique. On suppose de plus que les valeurs propres de A sont positives (au sens français, ce qui signifie que la valeur 0 est admise).

On définit de E dans $\mathbb{R}$ une fonction F par la formule

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad \mathrm{F}(x) = (p|x) - {}^t\mathrm{X} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{X}.$$

Considérons une partie C non vide, fermée et convexe de E. Dans le cas où la fonction F est majorée sur C, on s'intéresse à la partie M – éventuellement vide – des points de C auxquels la restriction de F à la partie C atteint sa borne supérieure

$$\mathrm{M} = \{x \in \mathrm{C} \ ; \ \mathrm{F}(x) = \sup_{y \in \mathrm{C}} \mathrm{F}(y)\}.$$

**III.A.** Dans cette question, on montre que la partie M est convexe.

**III.A.1.** On se donne deux points $x_0$ et $x_1$ de C. Pour tout $t$ dans $[0, 1]$, on introduit le point

$$x_t = (1-t)x_0 + tx_1.$$

Pour tout $t$ dans $[0, 1]$, montrer l'égalité

$$\mathrm{F}(x_t) = (1-t)\mathrm{F}(x_0) + t\mathrm{F}(x_1) + t(1-t)\,{}^t(\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_0)\cdot \mathrm{A}\cdot (\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_0).$$

**III.A.2.** On suppose que l'ensemble M n'est pas vide. Montrer qu'il est convexe.

**III.B.** Dans cette question uniquement, on suppose que les valeurs propres de la matrice A sont toutes strictement positives.

**III.B.1.** Montrer l'existence d'une constante réelle $k$ strictement positive vérifiant

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad {}^t\mathrm{X}\cdot \mathrm{A}\cdot \mathrm{X} \geqslant k\,{}^t\mathrm{X}\cdot \mathrm{X}.$$

**III.B.2.** Montrer que la partie M possède au plus un élément.

**III.C.** Dans cette question, on caractérise les éléments de M.

**III.C.1.** Avec les mêmes notations qu'en **III.A.1**, montrer l'identité suivante

$$\forall t \in [0, 1], \qquad \mathrm{F}(x_t) - \mathrm{F}(x_0) = -t^2 \times {}^t(\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_0)\cdot \mathrm{A}\cdot (\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_0) + t \times {}^t(\mathrm{P} - 2\mathrm{A}\cdot \mathrm{X}_0)\cdot (\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_0).$$

**III.C.2.** Montrer l'équivalence

$$x \in \mathrm{M} \iff \Big(x \in \mathrm{C} \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \mathrm{C}, \quad {}^t(\mathrm{P} - 2\mathrm{A}\cdot \mathrm{X})\cdot (\mathrm{Y} - \mathrm{X}) \leqslant 0\Big).$$

**III.D.** Dans cette question, on suppose que l'ensemble C est borné et on considère un nombre réel R strictement positif tel que C soit contenu dans la boule centrée en l'origine de rayon R.

**III.D.1.** Montrer que M possède au moins un élément.

**III.D.2.** Construire un exemple où la fonction F n'est pas la fonction nulle et où l'ensemble M possède une infinité d'éléments.