PC* — mathématiques **mars 2016**

Intégrales à paramètre : les théorèmes et leurs démonstrations

Théorème de convergence dominée. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies et continues par morceaux sur un intervalle I, à valeurs réelles (ou complexes).

On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux.

On suppose aussi qu'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I, à valeurs réelles positives, vérifiant la domination

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathrm{I}, \qquad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t).$$

On peut alors affirmer que f est intégrable sur I, de même que la fonction f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec la propriété suivante

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathrm{I}} f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\mathrm{I}} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Remarques. Ce théorème fondamental nécessite un cadre théorique trop important pour qu'il soit envisageable de le démontrer dans le cadre de ce poly. Il n'en est cependant pas de même des théorèmes qui suivent, qui en sont tous des corollaires.

Théorème de continuité sous l'intégrale. Soient I et J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$. On considère une fonction f définie sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$, à valeurs réelles (ou complexes).

On suppose que pour tout t dans J, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.

On suppose que pour tout x dans I, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J.

On suppose enfin que pour tout segment $[a,b]$ contenu dans I, il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur J telle que la domination $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ soit valable pour tout (x,t) dans $[a,b] \times \mathrm{J}$.

On peut alors affirmer que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{J}} f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est définie et continue sur l'intervalle I.

Remarque. 1. L'hypothèse de domination entraîne automatiquement l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto f(x,t)$ pour tout x dans $[a,b]$, et comme on suppose l'existence d'une telle domination pour chaque segment contenu dans I, cette intégrabilité est obtenue pour tout x dans I.

2. L'apprentissage de ce théorème nécessite de bien comprendre le rôle de chacune des deux variables. Plutôt que de raisonner en termes de x et de t, il vaut mieux avoir en tête les termes de « paramètre » et de « variable d'intégration ».

3. La dernière hypothèse requiert une fonction dominante φ indépendante du paramètre, comme dans le théorème de convergence dominée.

Démonstration du théorème de continuité sous l'intégrale. Comme on vient de le remarquer, l'hypothèse de domination permet d'affirmer que la fonction F est bien définie sur l'intervalle I.

Soit maintenant un élément y de l'intervalle I. On va prouver que la fonction F est continue en y. Pour cela, il suffit, d'après le théorème de caractérisation séquentielle de la limite, de montrer que pour toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I qui converge vers y, la suite $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(y)$.

Prenons donc une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I qui converge vers y. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons f_n la fonction définie de J vers $\mathbb{C}$ par $f_n : t \mapsto f(y_n, t)$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, la fonction f_n est une fonction continue par morceaux et intégrable sur J.

Pour tout t dans J, la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre $f(y,t)$ car la fonction $x \mapsto f(y,t)$ est continue en y.

Enfin, comme la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y, il existe[1] a et b dans I tels que le segment $[a,b]$ contienne tous les termes de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On sait alors qu'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur J telle que la majoration $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ soit valable pour tout (x,t) dans $[a,b] \times \mathrm{J}$. On en déduit la domination $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout t dans J.

Le théorème de convergence dominée s'applique. Il montre que la suite $(\mathrm{F}(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre $\mathrm{F}(y)$. La caractérisation séquentielle de la limite permet d'en déduire que la fonction F est continue en y.

On a finalement prouvé la continuité de la fonction F sur l'intervalle I. ♢

1. Ce point n'est pas totalement évident. J'invite le lecteur ou la lectrice à combler les détails.

Remarque. Notre programme officiel ne contient pas de généralisation de ce théorème qui permettrait de passer à la limite sous l'intégrale quand le paramètre tend vers une borne de l'intervalle I. Par exemple, aucun de nos théorèmes ne permet de montrer directement que $\int_0^{\pi/2}(\sin t)^x \, \mathrm{d}t$ tend vers 0 quand le paramètre réel x tend vers $+\infty$.

Il est cependant possible de calquer le raisonnement ci-dessus et de s'en sortir avec le théorème de convergence dominée et la caractérisation séquentielle de la limite.

Théorème de dérivation sous l'intégrale. Soient I et J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$. On considère une fonction f définie sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$, à valeurs réelles (ou complexes).

On suppose que pour tout t dans J, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

On suppose que pour tout x dans I, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux et intégrables sur J.

On suppose enfin que pour tout segment $[a,b]$ contenu dans I, il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur J telle que la domination $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$ soit valable pour tout (x,t) dans $[a,b] \times \mathrm{J}$.

On peut alors affirmer que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{J}} f(x,t) \, \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I, avec

$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_{\mathrm{J}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \, \mathrm{d}t.$$

Démonstration du théorème de dérivation sous l'intégrale. Les hypothèses permettent déjà d'affirmer que la fonction F est bien définie sur I. Prouvons sa dérivabilité. Pour cela, fixons un élément y de I et prouvons que le quotient $\dfrac{\mathrm{F}(z)-\mathrm{F}(y)}{z-y}$ tend vers $\displaystyle\int_{\mathrm{J}} \frac{\partial f}{\partial x}(y,t) \, \mathrm{d}t$ quand z tend vers y. Comme dans la démonstration précédente, on va utiliser la caractérisation séquentielle de la limite et le théorème de convergence dominée.

Prenons donc à nouveau une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{I} \setminus \{y\}$ qui converge vers y. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on remarque l'égalité suivante

$$\frac{\mathrm{F}(y_n)-\mathrm{F}(y)}{y_n-y} - \int_{\mathrm{J}} \frac{\partial f}{\partial x}(y,t) \, \mathrm{d}t = \int_{\mathrm{J}} \left(\frac{f(y_n,t)-f(y,t)}{y_n-y} - \frac{\partial f}{\partial x}(y,t) \right) \, \mathrm{d}t.$$

Il s'impose donc de poser $g_n(t) = \dfrac{f(y_n,t)-f(y,t)}{y_n-y} - \dfrac{\partial f}{\partial x}(y,t)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout t dans J.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, la fonction g_n est continue par morceaux et intégrable sur I d'après les hypothèses du théorème. De plus, la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction nulle d'après la définition de la dérivabilité de la fonction $x \mapsto f(x,t)$.

Il reste à obtenir une domination. Pour cela, comme dans la démonstration précédente, on introduit un segment $[a,b]$ de I qui contient tous les termes de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (et qui contient donc aussi y), puis on introduit, selon les hypothèses de l'énoncé, une fonction de domination φ continue par morceaux et intégrable sur J vérifiant la domination

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathrm{J}, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t).$$

D'après le théorème des accroissements finis, pour chaque n dans $\mathbb{N}$ et tout t dans J, on obtient la majoration $\left|\dfrac{f(y_n,t)-f(y,t)}{y_n-y}\right| \leqslant \varphi(t)$ puis $|g_n(t)| \leqslant 2\varphi(t)$.

Les hypothèses du théorème de convergence dominée sont alors bien vérifiées et l'on peut conclure que la suite de terme général $\displaystyle\int_{\mathrm{J}} g_n(t) \, \mathrm{d}t$ converge vers 0, ce qui signifie que la suite de terme général $\dfrac{\mathrm{F}(y_n)-\mathrm{F}(y)}{y_n-y}$ converge vers le nombre $\displaystyle\int_{\mathrm{J}} \frac{\partial f}{\partial x}(y,t) \, \mathrm{d}t$. D'après la caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que le taux d'accroissement $\dfrac{\mathrm{F}(z)-\mathrm{F}(y)}{z-y}$ possède cette même limite quand z tend vers y. Ainsi, la fonction F est dérivable en y et $\mathrm{F}'(y)$ vaut $\displaystyle\int_{\mathrm{J}} \frac{\partial f}{\partial x}(y,t) \, \mathrm{d}t$.

Pour prouver que F est de classe $\mathcal{C}^1$, il suffit alors de prouver que la fonction F' est continue. C'est une application directe du théorème de continuité sous l'intégrale. $\diamondsuit$
