Mathématiques — préparation à l'oral

Nombres complexes, polynômes

Exercice 1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ les points d'affixes respectives z, z^2, z^3. 0664-17

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur z pour que l'orthocentre du triangle ABC soit l'origine.

Exercice 2. Trouver les racines du polynôme $\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + \mathrm{i}$. 0375-17

Exercice 3. Factoriser dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ le polynôme $\mathrm{X}^9 + \mathrm{X}^6 + \mathrm{X}^3 + 1$. 0502-15

Exercice 4. Soit un entier $n \geqslant 2$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $1 + 2z + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$. 0665-17

Exercice 5. On considère le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X} + 1$. P084-14

1. Prouver que le polynôme P possède trois racines réelles distinctes. On les note a, b, c.

2. Calculer $a^4 + b^4 + c^4$.

Exercice 6. Soient $x_0, \ldots, x_n$ des nombres complexes tous distincts. Soient $y_0, \ldots, y_n, z_0, \ldots, z_n$ des nombres complexes quelconques. 0770-17

Montrer qu'il existe un unique polynôme H dans $\mathbb{C}_{2n+1}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathrm{H}(x_k) = y_k \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}'(x_k) = z_k.$$

Exercice 7. A028-23

Soit un entier $n \geqslant 2$. On pose $\mathrm{P} = \displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} (\mathrm{X} - \omega)$ et $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1 - \omega}$.

1. Simplifier l'expression de P.

2. Simplifier l'expression de S.

Exercice 8. Trouver tous les polynômes complexes P qui vérifient l'égalité $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = \mathrm{P}(\mathrm{X})\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$. 0682-15

Exercice 9. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. On définit les polyômes 0166-15

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^n - |a_1|\mathrm{X}^{n-1} - \cdots - |a_n| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{X}^n + a_1\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_n.$$

a. Montrer que P possède une unique racine strictement positive. On la note r.

b. Montrer que toute racine complexe de Q a un module majoré par r.

Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 10. Soient $z_0, \ldots, z_n$ des nombres complexes tous distincts. Montrer que la famille $((\mathrm{X} - z_k)^n)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$. 0669-17

Exercice 11. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. S001-22

a. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose que tout vecteur non nul de E est un vecteur propre de f.
Montrer que f est un multiple de Id_E.

b. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose que f commute avec tous les endomorphismes de E.
Montrer que f est un multiple de Id_E.

Exercice 12. A007-23

On considère une famille $\mathcal{F} = (\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_p)$ d'éléments de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et une famille $\mathcal{G} = (\mathrm{G}_1, \ldots, \mathrm{G}_n)$ d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $\mathrm{M}_{i,j} = \mathrm{F}_i \times \mathrm{G}_j^{\mathrm{T}}$.

1. Montrer que la famille $(\mathrm{M}_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{G}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2. Soit un entier $r \leqslant \min(p, n)$. Déterminer le rang de la matrice $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \mathrm{M}_{k,k}$.

Exercice 13. A014-23

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soient u et v deux endomorphismes de E.

1. Prouver la majoration $\mathrm{rg}(u + v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

2. On suppose que $u \circ v$ est nul et que $u + v$ est bijectif.

Prouver les égalités $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = n$ et $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(v)$.

Exercice 14. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E qui commutent. 0381-17

Montrer que $p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont des projecteurs et préciser leurs axes.

Exercice 15. Soient p et q deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. On fait les hypothèses 0687-15

$$p + q = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}(p) + \mathrm{rg}(q) \leqslant \dim(\mathrm{E}).$$

Montrer que p et q sont des projecteurs.

Exercice 16. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E. On suppose que f^n est nul et que f^{n-1} ne l'est pas. A046-16

On note $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec g.

1. Montrer qu'il existe un vecteur a de E tel que la famille $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ soit une base de E.

2. Montrer que $(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}, f, \ldots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}(f)$.

Exercice 17. On considère l'endomorphisme $\Delta : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X} + 2) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$ de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. A035-17

a. Déterminer le noyau de Δ.

b. On note Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ induit par Δ. Déterminer son image.

Matrices

Exercice 18. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{pmatrix}$. 0783-17

a. Déterminer le rang de M.

b. Calculer M^{-1} en cas d'existence.

Exercice 19. On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A et A^{T} sont semblables. 0776-17

Exercice 20. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $\mathrm{X} + \mathrm{X}^{\mathrm{T}} = \mathrm{tr}(\mathrm{X})\mathrm{A}$. 0507-17

Exercice 21. Soit M une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que M^{T} commute avec M. Montrer que M est diagonale. 0387-17

Exercice 22. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Soient X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. 0397-17

Montrer que l'inversibilité de la matrice $\mathrm{A} + \mathrm{Y} \times \mathrm{X}^{\mathrm{T}}$ équivaut à $\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \times \mathrm{A}^{-1} \times \mathrm{Y} \neq -1$.

Exercice 23. On définit les matrices A072-17

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \ddots & 2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer les inverses de ces matrices. Trouver un lien entre N et M^2.

Exercice 24. Trouver tous les couples (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant les égalités $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 0689-15

Exercice 25. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que les matrices A, B et $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ sont de rang 1. 0216-15
Montrer alors qu'au moins l'une des deux égalités $\mathrm{Im}(\mathrm{A}) = \mathrm{Im}(\mathrm{B})$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{B})$ est vraie.

Déterminant

Exercice 26. **1.** On considère des polynômes unitaires $\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}$ tels que pour tout indice k concerné, le polynôme P_k soit de degré k. Soient $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}$. A071-17
Calculer le déterminant de la matrice $(\mathrm{P}_{j-1}(a_i))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

2. Soient $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice $(\cos((j-1)x_i))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Exercice 27. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -\mathrm{A} \\ \mathrm{B} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$. 0396-17

Montrer l'égalité $\mathrm{dét}(\mathrm{M}) = \mathrm{dét}(\mathrm{I}_n + \mathrm{AB})$.

Exercice 28. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$. 0819-19

Exercice 29. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On fait l'hypothèse 1311-12

$$\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{dét}(\mathrm{A} + \mathrm{X}) = \mathrm{dét}(\mathrm{A}) + \mathrm{dét}(\mathrm{X}).$$

Montrer que A est nulle.

Exercice 30. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note ses colonnes $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$. Pour tout indice j dans $[\![1, n]\!]$, on pose 0948-15

$$\mathrm{B}_j = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq j}} \mathrm{A}_k.$$

On note B la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les colonnes sont $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_n$. Exprimer le déterminant de la matrice B en fonction de celui de la matrice A.

Exercice 31. Soient A et X deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice X étant de rang 1. 0695-15
Prouver l'inégalité $\mathrm{dét}(\mathrm{A} + \mathrm{X})\,\mathrm{dét}(\mathrm{A} - \mathrm{X}) \leqslant \mathrm{dét}(\mathrm{A}^2)$.

Réduction

Exercice 32. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}^*$. Déterminer les valeurs propres de la matrice A de coefficients $a_{i,j} = \lambda_i/\lambda_j$. 0037-17

Exercice 33. On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. 0407-17

Déterminer la dimension de $\{\mathrm{B} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\ ;\ \mathrm{AB} = \mathrm{BA}\}$.

Exercice 34. Trouver les racines carrées de $\mathrm{Diag}(1, 2, -1, -1)$ dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. 0794-17

Exercice 35. Pour tout polynôme réel P, on pose $f(\mathrm{P}) = (\mathrm{X}^3 - \mathrm{X})\mathrm{P}' - (\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{P}$. A012-17

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Exercice 36. Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on pose $\mathrm{M}(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble de toutes les matrices de cette forme. A036-17

1. On pose $\mathrm{J} = \mathrm{M}(0, 1, 0)$. Calculer J^2 puis exprimer $\mathrm{M}(a, b, c)$ en fonction de $\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{J}^2$.

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sa dimension. Montrer également que E est stable par produit.

3. Vérifier que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et exprimer son spectre à l'aide de $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$. Trouver une base de diagonalisable pour J.
En déduire que $\mathrm{M}(a, b, c)$ est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

4. Montrer que les valeurs propres de $\mathrm{M}(a, b, c)$ sont réelles si, et seulement si, les coefficients b et c sont égaux.

5. On note $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme canoniquement associé à $\mathrm{M}(a, b, c)$ et on suppose que ce n'est ni l'identité ni l'application nulle.
À quelles conditions sur (a, b, c) l'endomorphisme $f_{a,b,c}$ est-il un projecteur ? Dans ce cas, préciser son noyau et son image.

Exercice 37. Une *matrice stochastique* est une matrice carrée à coefficients réels positifs telle que sur chaque ligne, la somme des coefficients soit égale à 1. A045-17

1. Soient A et B deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est stochastique.

2. Soit A une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que 1 est une valeur propre de A et que toutes les valeurs propres de A ont un module majoré par 1.

3. Montrer l'égalité $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}) = \mathrm{Ker}((\mathrm{A} - \mathrm{I})^2)$.

Exercice 38. On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. A066-17

Montrer que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mais pas diagonalisable.

Exercice 39. Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit A une matrice de rang 1 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A057-17

1. Montrer que 0 est une valeur propre de A.

2. Montrer que la matrice A est diagonalisable si, et seulement si, sa trace est non nulle.

0988-15

Exercice 40. On considère les matrices

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M}(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que J et K sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et trouver leurs éléments propres.

b. Diagonaliser la matrice $\mathrm{M}(a,b,c)$.

Exercice 41. A006-23

Soit un entier $n \geqslant 2$. On note A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent 0 et les autres coefficients valent 1.

1. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1}.

2. Déterminer les valeurs propres de A et les espaces propres correspondants.

Exercice 42. A033-23

1. Question de cours : rappeler la définition d'un endomorphisme diagonalisable et ses caractérisations.

2. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}) = \{2, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$.

Trouver toutes les valeurs possibles pour la trace de A et le déterminant de A.

Exercice 43. A037-23

Soit un entier $n \geqslant 2$. On pose $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, on pose $\Delta(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X}-1)$.

1. Vérifier que Δ est un endomorphisme de E.

2. On note $\mathcal{E} = (1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^n)$ la base canonique de E.

Vérifier que $\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(\Delta)$ est une matrice triangulaire supérieure et que son rang vaut n.

3. Montrer que Δ possède une unique valeur propre et déterminer l'espace propre associé.

4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, on pose

$$u(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+a) \quad \text{et} \quad v(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \mathrm{P}^{(k)}.$$

Pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$, calculer $u(\mathrm{X}^p)$ et $v(\mathrm{X}^p)$. En déduire l'égalité $u = v$.

5. Pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, démontrer l'égalité

$$\Delta(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1-(-1)^k}{k!} \mathrm{P}^{(k)}.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{F}_\alpha = \{\mathrm{P} \in \mathrm{E} \ ; \ \Delta(\mathrm{P}) = \alpha \mathrm{P}'\}$.

6. Montrer que $\mathrm{F}_\alpha = \{0\}$ si $\alpha \neq 2$ et que $\mathrm{F}_2 = \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$.

Exercice 44. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. A026-23

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose que f possède n valeurs propres distinctes.

1. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Montrer que f et $\mathrm{P}(f)$ sont diagonalisables et admettent une base de diagonalisation commune.

2. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que f et g commutent. Montrer que g est diagonalisable.

3. Montrer que l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f est $\{\mathrm{Q}(f) \ ; \ \mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]\}$.

Exercice 45. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{R})$ vérifiant les relations 1315-12

$$\mathrm{A}^3 - 3\mathrm{A}^2 + 2\mathrm{A} = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 8.$$

Déterminer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 46. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la relation 1316-12

$$\mathrm{A}^4 - 2\mathrm{A}^3 + 2\mathrm{A}^2 = 0.$$

Montrer que sa trace est un entier pair.

Exercice 47. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la relation $\mathrm{A}^3 - \mathrm{A} - \mathrm{I}_n = 0$. Montrer que son déterminant est strictement positif. 1317-12

Exercice 48. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On fait les hypothèses 0803-17

$$\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 0, \quad \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2, \quad \mathrm{A}^n \neq 0.$$

Montrer que la matrice A est diagonalisable.

Espaces euclidiens

Exercice 49. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, on pose A085-17

$$(\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = \mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0) + \mathrm{P}(1)\mathrm{Q}(1) + \mathrm{P}(2)\mathrm{Q}(2).$$

a. Prouver qu'on a alors défini un produit scalaire.

b. Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 50. On rappelle que la formule $(\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)\,\mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. A029-17

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on considère le polynôme $\mathrm{P}_n = \sqrt{n}(1-\mathrm{X})^n$.

1. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, calculer $||\mathrm{P}_n||^2$.

2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme T de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \qquad (\mathrm{T}|\mathrm{P}) = \mathrm{P}(0).$$

Exercice 51. Pour tout couple (P, Q) de polynômes réels, on pose $(\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)}{\sqrt{1-t^2}}$. A042-17

1. Montrer que $(\mathrm{P}|\mathrm{Q})$ est bien défini.

2. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire.

3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on admet l'existence d'un polynôme T_n vérifiant l'identité

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Montrer que la famille $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

Exercice 52. Soit A une matrice symétrique définie positive. Montrer que ses coefficients diagonaux sont strictement positifs. 0698-17

Exercice 53. On considère une matrice M décomposée par blocs sous la forme $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$, avec $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. 0817-17

On suppose que M est une matrice orthogonale. Montrer l'égalité $|\text{dét}(\mathrm{A})| = |\text{dét}(\mathrm{D})|$.

Exercice 54. A016-23

On considère la matrice $\mathrm{A} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à cette matrice.

Caractériser géométriquement cette matrice.

Exercice 55. Soient U et V deux éléments de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $(\mathrm{U}+5\mathrm{V})/6$ soit orthogonale. Généraliser. 0815-17

Exercice 56. Soit M une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. 0422-17

a. Montrer l'existence d'une matrice orthogonale O et d'une matrice triangulaire supérieure T telles que $\mathrm{M} = \mathrm{OT}$.

b. Montrer la majoration $\text{dét}(\mathrm{M})^2 \leqslant \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2 \right)$.

Exercice 57. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs d'un espace euclidien E. 0541-15

a. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} ||x - x_k||^2$ possède un miminum sur E et que ce minimum est atteint en un unique point, qui sera noté y dans la suite.

b. Exprimer $f(y)$ en fonction de $||y||$ et des nombres $||x_k||$.

Exercice 58. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$. Soit a un vecteur unitaire de E. Soit $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. A031-23

Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on pose $g(x) = x + k\langle x|a\rangle a$.

1. Montrer que g est un endomorphisme symétrique de E.

2. Montrer que g est un automorphisme.

3. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de g.

Exercice 59. Pour toute matrice symétrique réelle A, prouver l'inégalité $\mathrm{tr}(\mathrm{A})^2 \leqslant \mathrm{rg}(\mathrm{A})\mathrm{tr}(\mathrm{A}^2)$. A061-17

Espaces vectoriels normés

Exercice 60. **1.** Donner la norme euclidienne habituelle sur $\mathbb{R}^n$. Existe-t-il d'autres normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^n$? A027-23

Dans la suite, la norme euclidienne habituelle sur $\mathbb{R}^n$ est notée $\|\ \|$. La sphère unité correspondante est notée S.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que la fonction $x \mapsto \|f(x)\|$ admet un maximum sur S. Ce maximum est noté $|||f|||$.

3. Pour tout couple (f, g) d'éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, prouver l'inégalité $|||f \circ g||| \leqslant |||f||| \times |||g|||$.

4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $|||f||| < 1$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} f^k$ est convergente et que sa somme est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 61. On note $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout élément f de E, on note A032-15

$$g_1(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \qquad \text{et} \qquad g_2(f) = \int_0^1 e^t\,|f(t)|\ dt.$$

1. Montrer que g_1 et g_2 sont des normes sur E.

2. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} 1 - nx & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ dans les espaces vectoriels normés (E, g_1) et (E, g_2).

Exercice 62. Pour tout polynôme réel P et tout entier n, on pose $a_n(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,t^n\,dt$. A001-23

Pour tout polynôme réel P, on pose

$$||P||_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|\,, \quad N_\infty(P) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n(P)|\,, \quad N_2(P) = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(P)^2}.$$

1. Justifier que ces quantités sont bien définies.

2. Montrer que $||\ ||_\infty$, N_∞ et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

3. Trouver des constantes α et β strictement positives telles que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad N_1(P) \leqslant \alpha N_2(P) \quad \text{et} \quad N_2(P) \leqslant \beta ||P||_\infty.$$

4. Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes entre elles.

Exercice 63. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$. On pose $D = \{x \in \mathbb{R}^2\ ;\ \|x\| \leqslant 1\}$. A011-23

Existe-t-il une partition de D en deux parties isométriques ?

Reformulation Existe-t-il deux parties A et B de D disjointes, de réunion D, et une fonction $f : A \to B$ bijective telle que

$$\forall (x,y) \in A^2, \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|\ ?$$

Exercice 64. Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, on pose $\|M\|_\infty = \max\{|m_{i,j}|\,;\, 1 \leqslant i,j \leqslant d\}$. A045-23

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

2. On pose $N = A - I_3$. Calculer N^2, puis les autres puissances de N.

3. Déterminer la limite de $\|A^n\|_\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

4. Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

5. Pour tout couple (M, N) de matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, prouver la majoration

$$\|MN\|_\infty \leqslant d \times \|M\|_\infty \times \|N\|_\infty.$$

6. On suppose que M est diagonalisable et possède au moins une valeur propre de module strictement supérieur à 1.

Déterminer la limite de $\|M^n\|_\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Suites numériques

Exercice 65. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que cette suite est *sous-additive*, c'est-à-dire 0174-15

$$\forall(m,n)\in\mathbb{N}^2,\qquad a_{m+n}\leqslant a_m+a_n,$$

et que la suite $(a_n/n)_{n\geqslant 1}$ est minorée. Prouver que la suite $(a_n/n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Exercice 66. Montrer que les suites $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(\sqrt{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ sont divergentes. 0893-15

Exercice 67. Soient p et q dans $]0,+\infty[$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k^p \ln^q(k)$ est équivalent à $\dfrac{n^{p+1}\ln^q(n)}{p+1}$ quand n tend vers $+\infty$. 0712-17

Exercice 68. Pour tout entier $n\geqslant 2$, montrer que l'équation $x^n=x+1$ possède une unique solution dans $]0,+\infty[$, notée x_n. 1103-17

Obtenir un développement asymptotique de x_n sous la forme $a+\dfrac{b}{n}+\dfrac{c}{n^2}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 69. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que $x_n+\frac{1}{2}x_{n+1}$ tende vers 1 quand n tend vers $+\infty$. 0452-15
Prouver que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et trouver sa limite.

Exercice 70. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n$. A086-19

Exercice 71. On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=1$ et la relation de récurrence 0447-15

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad u_{n+1}=\frac{3+2u_n}{3+u_n}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ à déterminer puis dominer $u_n-\ell$.

Exercice 72. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. A018-15

Exercice 73. Pour tout x réel, on note $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$. A012-23

Trouver un équivalent de $\{n!\,\mathrm{e}\}$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

Exercice 74. A019-23

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit le polynôme $\mathrm{P}_n=-4+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{X}^k$.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que P_n possède une unique racine dans $]0,+\infty[$. Cette racine est notée x_n.

2. Calculer x_1 et x_2. Montrer que $x_5<1$.

3. Quel est le signe de $\mathrm{P}_{n+1}(x_n)$? En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone puis qu'elle converge. Sa limite est notée ℓ.

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que $x_n^{n+1}-5x_n+4=0$.

5. Montrer que x_n^{n+1} tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et en déduire la valeur de ℓ.

6. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $\delta_n=x_n-\ell$.

Vérifier l'égalité $\delta_n=\frac{1}{5}x_n^{n+1}$ et en déduire que $n\delta_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

7. Trouver une constante K telle que δ_n soit équivalent à $\mathrm{K}\times\ell^{n+1}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 75. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{I}_n = \left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$. A035-23

On définit la fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$ sur la réunion des I_n.

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction tangente.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans I_n, notée x_n dans la suite.

3. Montrer que x_n est équivalent à $n\pi$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_n - n\pi$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité $y_n = \mathrm{Arctan}(x_n)$. En déduire la limite de y_n quand n tend vers $+\infty$.

5. Montrer que $\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2}\right)$ équivaut à $y_n - \frac{\pi}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

6. En déduire un développement asymptotique de la forme $y_n = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

7. Obtenir un développement asymptotique de la forme $y_n = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 76. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant l'identité $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(\cos(x))$. 0445-17

Exercice 77. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On fait l'hypothèse $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = 1/2$. 0452-17

Montrer que f possède au moins un point fixe. Y a-t-il unicité ?

Exercice 78. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x/\ln(x)$ réalise une bijection de $[\mathrm{e}, +\infty[$ sur lui-même. Déterminer un équivalent de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. 0450-17

Exercice 79. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0,1]$, telles que $f \circ g = g \circ f$. 0580-17

On veut montrer qu'il existe x dans $[0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il n'existe pas de tel x. Quitte à échanger les rôles de f et de g, on fait l'hypothèse $f(0) > g(0)$.

a. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout x dans $[0,1]$, on ait $f(x) \geqslant g(x) + c$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, prouver l'inégalité

$$f^{\circ n}(x) \geqslant g^{\circ n}(x) + nc,$$

où la notation $f^{\circ n}$ désigne la composée n-ième de f avec elle-même.

c. Conclure.

Exercice 80. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{x}$. On pose également $f(0) = 0$. 0584-17

a. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

c. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f^{-1}.

Exercice 81. Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \circ g$ est décroissante. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ admettent un unique point fixe. 0721-17

Exercice 82. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on définit $f_n : x \mapsto (1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}$ sur $\mathbb{R}$. 0094-17

Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout x dans $\mathbb{R}$, prouver la relation $f_n^{(2n+2)}(x) = \left(\prod_{k=0}^{n}(2k+1)^2\right)(1+x^2)^{-n-\frac{3}{2}}$.

Exercice 83. Trouver la limite de $(\sin(x))^{1/\cos(x)}$ quand x tend vers $\pi/2$ par valeurs strictement inférieures. 0469-15

Exercice 84. Trouver la limite de $x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x - \mathrm{e}x^3\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ quand x tend vers $+\infty$. 0734-15

Séries numériques

Exercice 85. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive. Y a-t-il des implications entre les deux énoncés suivants ? 0440-17
(i) La série $\sum a_n$ converge.
(ii) $a_n = \mathrm{o}(1/n)$.

Exercice 86. Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4}+\sin(n)}$. 0830-17

Exercice 87. Soit $\alpha > 0$. Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor - \lfloor\sqrt{n-1}\rfloor}{n^\alpha}$. 0831-17

Exercice 88. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{R}_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}$. 0719-17

a. Justifier l'existence de R_n.

b. Montrer que $(n+1)!\mathrm{R}_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

c. En déduire la nature de la série $\sum \sin(2\pi e n!)$.

Exercice 89. Convergence et calcul de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$. 0834-17

Exercice 90. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels strictement positifs, qui converge vers 0. A039-17

On pose $v_n = \displaystyle\int_0^{u_n} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.

Prouver que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Exercice 91. Étudier la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$ (convergence et convergence absolue). A050-17

Exercice 92. Soit $\alpha > 0$. Nature de la série de terme général $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$. 0725-15

Exercice 93. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $s(n)$ le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n. 1058-12

Convergence et somme de la série de terme général $\dfrac{s(n)}{n(n+1)}$.

Exercice 94. Montrer que $\cos(1)$ est irrationnel. 0533-16

Suites et séries de fonctions

Exercice 95. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = 3^n\left(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\right)$. 0731-17

a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $[0,1]$.

b. Le passage à la limite sous l'intégrale dans $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est-il valide ?

Exercice 96. Trouver l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$. 0600-17

Après avoir simplifié le produit $\displaystyle\prod_{n=0}^{\mathrm{N}}\left(1+x^{2^n}\right)$, expliciter $f(x)$.

Exercice 97. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto n x^\alpha \mathrm{e}^{-nx^2}$. 1119-17

Étudier les différents modes de convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exercice 98. On se donne une fonction f définie sur $]0,+\infty[$, à valeurs réelles. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et tout x dans $[0,+\infty[$, on pose A026-17

$$u_n(x) = f(n+x) - f(n).$$

On pose $\mathrm{F}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ quand c'est possible.

1. Pour tout N dans $\mathbb{N}^*$, prouver l'égalité $\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n(1) = f(\mathrm{N}+1) - f(1)$. En déduire que l'existence de F(1) équivaut à la convergence de la suite $(f(n))_{n\geqslant 1}$.

2. On prend $f : x \mapsto \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$. Montrer que F(1) existe et donner sa valeur.

3. On prend $f : x \mapsto \sin(\pi x + \pi\sqrt{x}/2)$. Étudier l'existence de F(1). Indication : considérer $f((2n+1)^2)$.

4. Dans cette question, on fait l'hypothèse que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f(n)$ est convergente. Sa somme est notée S.

a. Montrer que pour tout p dans $\mathbb{N}$, le nombre $\mathrm{F}(p)$ existe.

b. Montrer que $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}(\mathrm{F}(p) - \mathrm{F}(p+1))$ existe et exprimer sa valeur en fonction de S.

5. Pour tout entier $p \geqslant 2$, on note C_p l'énoncé « le nombre $\mathrm{F}(p)$ existe ». Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction f pour que l'énoncé C_p soit vrai.

6. Montrer que la fonction de la question 3 vérifie C_2.

Exercice 99. A005-23

On fixe $\alpha > 0$. On pose $\mathrm{I} = [0, \frac{\pi}{2}]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $u_n : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin^n(x)\cos^\alpha(x) \end{array}$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement sur I.

2. Cette série de fonctions converge-t-elle normalement sur I ?

3. Converge-t-elle uniformément sur I ?

Exercice 100. A013-23

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \left]0, +\infty\right[$, on pose $u_n(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. Prouver que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\left]0, +\infty\right[$. Sa somme est notée f.

2. Montrer que f est continue sur $\left]0, +\infty\right[$.

3. Prouver que f est intégrable sur $\left[1, +\infty\right[$ et exprimer son intégrale sous la forme d'une somme de série.

4. La fonction f est-elle intégrable sur $\left]0, +\infty\right[$?

5. Vérifier que f est décroissante sur $\left]0, +\infty\right[$. Que dire de ses limites aux bornes ?

6. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 101. A044-23

Soit f une fonction définie sur $\left]0, +\infty\right[$, à valeurs réelles.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n : x \mapsto f(x+n) - f(n)$ sur $\left]0, +\infty\right[$.

Pour tout x de $\left]0, +\infty\right[$ pour lequel la série $\sum u_n(x)$ converge, on pose $\mathrm{F}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité $\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n(1) = f(\mathrm{N}+1) - f(1)$.
En déduire que l'existence de $\mathrm{F}(1)$ équivaut à la convergence de la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2. Dans cette question, on prend pour f la fonction $x \mapsto \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$. Montrer que $\mathrm{F}(1)$ existe.

3. Dans cette question, on prend pour f la fonction $x \mapsto \sin(\pi x + \frac{\pi}{2}\sqrt{x})$.
Montrer que $\mathrm{F}(1)$ n'existe pas.
On pourra s'intéresser à $f((2n+1)^2)$.

Exercice 102. On pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$. 0580-16

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Montrer que f est développable en série entière sur cet ensemble.

Séries entières

Exercice 103. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$. 0305-17

Rayon de convergence de $\sum u_n z^n$.

Exercice 104. Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum (3 + (-1)^n)^n x^n$. 0738-17

Exercice 105. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t$. Pour tout x convenable, on pose $\mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. 0858-17

a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction S.

b. Exprimer $\mathrm{S}(x)$.

Exercice 106. Rayon de convergence et somme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\mathrm{e}^{in\alpha}}{n} x^n$. 0863-17

Exercice 107. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $a_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k(n-k)}$. 0597-15

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ puis calculer sa somme.

Exercice 108. Pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_p : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{n^p}$. 0915-10

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière écrite ci-dessus et préciser la limite de la fonction f_p en R^-.

b. Déterminer un équivalent de $f_p(x)$ quand x tend vers R^-. On appliquer la méthode des rectangles.

Exercice 109. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs. 0184-15

On suppose que la série $\sum b_n$ est divergente et que la série entière $\sum b_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1. On suppose enfin que le quotient a_n/b_n possède une limite finie, notée s, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

On pose

$$\mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad \mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad b(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

a. Montrer que $\mathrm{A}_n/\mathrm{B}_n$ tend vers s quand n tend vers $+\infty$.

b. Montrer que la fonction a est définie au moins sur $]-1,1[$.

c. Montrer que $a(x)/b(x)$ tend vers s quand x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures.

Exercice 110. On fixe $q \in\,]-1,1[$. Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $]-1,1[$ la fonction A002-23

$$f_{\mathrm{N}} : x \mapsto \prod_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{1+xq^n}{1-xq^n}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_{\mathrm{N}})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]-1,1[$. Sa limite simple est notée f.

2. Montrer que la fonction f ne s'annule pas et qu'elle vérifie la relation

$$\forall x \in\,]-1,1[\,, \quad f(x) = \frac{1+x}{1-x} f(qx).$$

3. Montrer que la fonction f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et préciser son développement.

Exercice 111. Développer la fonction arccosinus en série entière sur $]-1,1[$. A008-23
Ce développement est-il valable sur $[-1,1]$?

Exercice 112. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{n^2-3n+1}{n!}$. A010-23

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$ et calculer sa somme.

Exercice 113. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ possède un rayon de convergence R fini et strictement positif. 0515-16

Trouver les rayons de convergence de $\sum a_n z^{2n}$, de $\sum (a_n)^2 z^n$ et de $\sum a_n z^{n^2}$.

Intégration

Exercice 114. Soient f et g dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que la fonction g est positive. 0453-17

Montrer l'existence de $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t = f(x)\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 115. Trouver un équivalent simple de $\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{Arcsin}(t)}\ \mathrm{d}t$ quand x tend vers 0. 0881-17

Exercice 116. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_\alpha^1 \frac{\cos^2(x)}{x^{3/2}}\ \mathrm{d}x$ quand α tend vers 0. 1114-17

Exercice 117. Le produit de deux fonctions continues et intégrables sur $]0,1]$ est-il encore intégrable ? 0462-17

Si f est continue et intégrable sur $]0,1]$, est-ce encore vrai pour $t \mapsto f(t)\ln(t)$?

Exercice 118. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1-x)\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$. 0587-17

Exercice 119. On prend une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'elle admet en $-\infty$ et en $+\infty$ des limites finies A et B. 0376-11

Pour tout t dans $\mathbb{R}$, montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+t)-f(x))\ \mathrm{d}x$ et calculer sa valeur.

Exercice 120. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n}\ \mathrm{d}x$ selon la valeur de l'entier n et calculer cette intégrale quand elle existe. A038-23

Exercice 121. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}+\sin(x)}\ \mathrm{d}x$. A039-23

Exercice 122. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{(1+x)^2}\ \mathrm{d}x$. 0594-17

Exercice 123. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ avec $a<b$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de l'intégrale 0726-17

$$\int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^n\ \mathrm{d}t$$

et calculer sa valeur en cas d'existence.

Exercice 124. Soit f une fonction continue et bornée sur $[0,+\infty[$. A070-17

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, montrer qu'il est possible de poser $\mathrm{A}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\frac{\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$.

b. Trouver un équivalent de A_n quand n tend vers $+\infty$ dans le cas $f(0)\neq 0$.

Exercice 125. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\ \mathrm{d}x$. A051-23

Trouver un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 126. Étudier la suite de terme général $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\ \mathrm{d}x$. 0675-10

Exercice 127. On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)\ln(t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. 0893-17

a. Montrer que cette intégrale existe.

b. Justifier l'égalité $\mathrm{I} = 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(2n-1)^2}$.

Exercice 128. A041-23

1. Montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. Sa valeur est notée I.

2. Montrer l'égalité $\mathrm{I} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^{n+1}}$.

Exercice 129. Pour tout x réel, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$. 0631-17

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

b. Trouver une relation entre f et f' et en déduire une expression de f.

Exercice 130. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$. 0887-17

a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

c. Pour tout x réel, prouver l'égalité $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{n^2+x^2}$.

Exercice 131. Trouver un équivalent de $\mathrm{Arccos}(u)$ quand u tend vers 1. 1135-17

En déduire que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{Arccos}(1-xt)}$ est bien définie puis prouver que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 132. Soit φ une fonction continue, décroissante et positive sur $[0, +\infty[$. 0626-17

Déterminer la limite de $x\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 133. Soit f une fonction continue, monotone et intégrable sur $]0,1[$. 0739-15

Montrer que la suite de terme général $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 134. A057-23

Pour tout x réel convenable, on pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.

2. Étudier la continuité de F, ainsi que sa dérivabilité.

3. Déterminer les limites de F aux bornes de son intervalle de définition.

Fonctions de plusieurs variables

Exercice 135. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $|ab| < 1$. On définit une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par la formule A087-17

$$f(x, y) = (x + a\sin(y), y + b\sin(x)).$$

Prouver que f est une bijection.

Exercice 136. Déterminer les extrema de $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ sur $\mathbb{R}^3$. 0761-17

Exercice 137. On note $\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ -1 < x < y < 1\}$ et $\mathrm{D}' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$. 1142-17

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction $f : (x, y) \mapsto (y - x)^3 + 6xy$.

Étudier les extremums de f sur D et sur D'.

Exercice 138. On définit une fonction f de $[0, 1]^2$ dans $\mathbb{R}$ en posant A032-23

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy} & \text{si } (x, y) \neq (1, 1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, prouver la majoration $(1 - x)(1 - y) \leqslant (1 - \sqrt{xy})^2$.

2. En déduire que f est continue en $(1, 1)$.

3. On pose $x_0 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Montrer que f admet un maximum en (x_0, x_0).

Exercice 139. On définit $f : (x, y) \mapsto x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}^2$ et $g : t \mapsto t + \exp(t - 1/t)$ sur $\mathbb{R}^*$. A063-17

Résoudre l'équation $g(t) = 0$. En déduire les points critiques de f puis étudier ces points critiques.

Exercice 140. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On fait l'hypothèse 0642-17

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \geqslant 1.$$

Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $||x||$ tend vers $+\infty$.

Exercice 141. On note $||\ ||$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. 0396-13

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On fait l'hypothèse que toutes les dérivées partielles de f sont bornées par 1.
Montrer la majoration

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant \sqrt{n}\ ||x - y||.$$

Exercice 142. A017-23
Soit $f \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[, \mathbb{R})$. On définit

$$\Phi : (x, y, z) \mapsto f\left(\frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)$$

de $]0, +\infty[^3$ dans $\mathbb{R}$.

Déterminer les choix de f pour lesquels la fonction Φ est harmonique.

Exercice 143. Résoudre l'équation $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. S001-23

Exercice 144. Résoudre $\dfrac{\partial f}{\partial x} - xy\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ à l'aide du changement de variables $(u, v) = (x, y\,\mathrm{e}^{x^2/2})$. 1140-17

Probabilités et dénombrement

Exercice 145. Déterminer le nombre d'applications $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ telles que $f \circ f = f$. 0613-16

Exercice 146. Pour tout couple (n,p) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on note $\mathrm{E}_{n,p}$ le nombre de solutions de l'équation A030-17

$$\max(|x_1|,\dots,|x_n|) = p,$$

d'inconnue $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{Z}^n$.

1. Calculer $\mathrm{E}_{1,1}$ et $\mathrm{E}_{2,2}$.

2. On note $\mathrm{S}_{n,p}$ le nombre de solutions de l'inéquation $\max(|x_1|,\dots,|x_n|) \leqslant p$.
Exprimer $\mathrm{E}_{n,p}$ à l'aide de certains des $\mathrm{S}_{n,k}$.

3. Montrer l'égalité $\mathrm{E}_{n,1} = 3^n - 1$.

4. Plus généralement, prouver l'égalité $\mathrm{E}_{n,p} = (2p+1)^n - (2p-1)^n$ si $p \geqslant 1$.

5. En déduire qu'il existe une constante C telle que $\mathrm{E}_{n,n}$ soit équivalent à $\mathrm{C}(2n)^n$.

6. Compter le nombre de solutions du système

$$\max(|x_1|,\dots,|x_n|) = p, \qquad \min(|x_1|,\dots,|x_n|) = p-1.$$

Exercice 147. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On en tire une poignée. Les 2^n poignées possibles sont supposées équiprobables (y compris la poignée vide). On note X la variable aléatoire donnant la somme des numéros tirés. 0655-17

Calculer l'espérance de X.

Exercice 148. Une urne contient M pommes vertes et N pommes rouges. On les mange une par une et on s'arrête quand on a mangé la dernière pomme rouge. Calculer la probabilité d'avoir mangé toutes les pommes. A010-17

Exercice 149. **1.** Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, prouver l'égalité $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{i}{i+j} = \dfrac{n^2}{2}$. P002-15

2. Soit N un élement de $\mathbb{N}^*$. Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N. On y prélève, avec remise, deux jetons l'un après l'autre. Si n et m sont les numéros sortis, on remplit une deuxième urne avec n boules vertes et m boules rouges. Enfin, on tire une boule de cette urne. Quelle est la probabilité que cette boule soit verte ?

3. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 150. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux variables aléatoires X et Y sur cet espace probabilisé, supposée indépendantes et de loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. A024-23

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$\mathrm{M}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathrm{X}(\omega) & 0 \\ 2 & \mathrm{Y}(\omega) \end{pmatrix}.$$

Calculer la probabilité des événements $\mathrm{A} = \{\mathrm{M} \text{ est inversible}\}$ et $\mathrm{B} = \{\mathrm{M} \text{ est diagonalisable}\}$.

Exercice 151. On lance deux dés équilibrés à n faces. Les résultats sont modélisés par deux variables aléatoires U_1 et U_2, supposées indépendantes. 0900-17

On pose $\mathrm{X} = \min(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)$ et $\mathrm{Y} = \max(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)$.

a. Déterminer la loi et l'espérance de X.

b. Calculer X + Y en fonction de U_1 et U_2. En déduire l'espérance de Y.

c. Calculer de même XY et en déduire la covariance de (X, Y).

Exercice 152. On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de paramètre $p \in]0,1[$. On appelle *doublet* le fait d'obtenir deux succès à la suite. On pose $q = 1 - p$. 0765-17

L'événement A_n a pour énoncé « On obtient le premier doublet au rang n. ».

L'événement B_n a pour énoncé « On a obtenu au moins un doublet au cours des n premières épreuves. ».

On pose $p_n = \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$.

a. Montrer l'égalité $\mathbb{P}(\mathrm{B}_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k$.

b. Justifier la formule de récurrence $p_{n+3} = p^2 q \left(1 - \sum\limits_{k=1}^{n} p_k\right)$.

c. En déduire une relation entre $p_{n+3}, p_{n+2}, p_{n+1}, p_n$.

d. Résoudre cette relation de récurrence en passant par le calcul des puissances d'une matrice.

Exercice 153. Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(p)$. 0906-17

On pose $\mathrm{T} = \min\{n \in \mathbb{N}^* \ ;\ \mathrm{X}_n = 1, \mathrm{X}_{n+1} = 0\}$. Déterminer la loi de T.

Exercice 154. Le nombre X de clients qui entrent dans une boutique une journée donnée suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque client achète un article avec une probabilité $p \in]0,1[$ ou aucun article. Déterminer la loi de Y, le nombre d'articles achetés au cours d'une journée. 0905-17

Exercice 155. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$. 0916-17

Déterminer la loi de $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$.

Exercice 156. On fixe un entier $p \geqslant 2$. On considère une suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1, p]\!]$. On pose $\mathrm{M}_n = \max(\mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_n)$. 0925-17

Déterminer la loi de M_n et la limite de $\mathbb{E}(\mathrm{M}_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 157. Soit N dans $\mathbb{N}^*$. Soit p dans $]0,1[$. On pose $q = 1 - p$. A019-17

On se donne des variables aléatoires $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ mutuellement indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre p.

1. Pour tout i dans $[\![1, \mathrm{N}]\!]$ et tout n dans $\mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i > n)$.

2. On définit la variable aléatoire $\mathrm{Y}_\mathrm{N} = \min(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{N})$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_\mathrm{N} > n)$.

3. Montrer que Y_N possède une espérance et calculer sa valeur.

Exercice 158. On considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables de Bernoulli. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on fait les hypothèses A080-17

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_{n+1} = 1 | \mathrm{X}_n = 1) = 0,2 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n+1} = 1 | \mathrm{X}_n = 0) = 0,4.$$

On note $x_n = \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 1)$.

1. Trouver une relation de récurrence entre x_{n+1} et x_n.

2. En déduire une expression de x_n.

3. Donner les valeurs de $\mathbb{E}(\mathrm{X}_n)$ et de $\mathbb{V}(\mathrm{X}_n)$.

Exercice 159. Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements incompatibles. Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. 0908-17

Exercice 160. Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Soit f une fonction définie sur $\mathrm{X}(\Omega)$, à valeurs réelles. On pose $\mathrm{Y} = f(\mathrm{X})$. 0650-17

On suppose que X et Y sont indépendantes. Que dire de Y ?

Exercice 161. On lance deux pièces équilibrées indéfiniment. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement « Les deux pièces ont donné le même nombre de pile et de face au cours des n premiers lancers. ». 1143-17

a. Déterminer $\mathbb{P}(\mathrm{E}_n)$.

b. Sur les n premiers lancers, quel est le nombre moyen d'indices k pour lesquels l'événement E_k est réalisé ?

Exercice 162. Que dire d'une variable aléatoire indépendante d'elle-même ? 0157-19

Exercice 163. Soit une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre 1. P006-15

1. On pose $\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$. Quelle est la loi de S_n ?

2. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, prouver l'égalité $\mathbb{P}(\mathrm{S}_n > n) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^n t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 164. On définit une fonction $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$ par $f : (n,m) \mapsto 2^n(2m+1)$. A036-23

1. Trouver un antécédent de 56 par f.

2. L'application f est-elle injective ?

3. Est-elle surjective ?

4. L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est-il dénombrable ?

Exercice 165. On considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, +1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose S002-23

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k.$$

En particulier, la variable aléatoire S_0 est nulle. On note T le temps de retour en 0 (éventuellement infini), c'est-à-dire

$$\mathrm{T}(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}^* \ ; \ \mathrm{S}_n = 0\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{E}_n = (\mathrm{T} > n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose

$$\mathrm{A}_k^n = (\mathrm{S}_k = 0) \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} (\mathrm{S}_i \neq 0).$$

On pose enfin $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = 0)x^n$ et $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{E}_n)x^n$.

a. Vérifier que f et g sont bien définies sur $[0,1[$.

b. Soient deux entiers k et n tels que $1 \leqslant k < n$. Montrer que $(\mathrm{S}_{k+1} - \mathrm{S}_k, \ldots, \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_k)$ et $(\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_{n-k})$ ont la même loi.

c. En déduire l'égalité $\mathbb{P}(\mathrm{A}_k^n) = \mathbb{P}(\mathrm{S}_k = 0)\mathbb{P}(\mathrm{E}_{n-k})$ puis simplifier la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{S}_k = 0)\mathbb{P}(\mathrm{E}_{n-k})$.

d. Pour tout x dans $[0,1[$, montrer l'égalité $f(x)g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et en déduire une expression de $g(x)$.

e. Pour tout $x \in [0,1[$, montrer l'égalité $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{T} = n)x^n = 1 - \sqrt{1-x^2}$.

f. En déduire la loi de T. On vérifiera en particulier que T est presque sûrement finie.

g. Calculer l'espérance de T.
