

**Mathématiques avec Python — préparation à l'oral**

**Exercice 1.** Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on pose  $u_0(a) = a$  puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}(a) = \operatorname{Arctan} \left( \frac{u_n(a)}{1 + \sqrt{1 + u_n(a)^2}} \right).$$

**a.** Écrire une fonction d'en-tête `suite(a, m)` et renvoie la liste  $(u_0(a), \dots, u_m(a))$ .  
Tester cette fonction en affichant `suite(0, 20)` puis `suite(1, 20)` et `suite(2023, 20)`.

**b.** Tracer le graphe de la fonction  $2^{10}u_{2^{10}}$  sur l'intervalle  $[-30, 30]$  avec un pas de 0,01.

---

**Exercice 2.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit la fonction  $A_n : \theta \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\theta)}{k}$  sur  $[-\pi, 3\pi]$ .

Tracer le graphe de  $A_n$  pour tout  $n$  dans  $[[1, 10]]$  puis pour tout  $n$  dans  $[[100, 110]]$ .

---

**Exercice 3.** Une matrice *stochastique* est une matrice carrée à coefficients réels positifs telle que sur chaque ligne, la somme des coefficients soit égale à 1.

**a.** Écrire une fonction d'en-tête `ligne(n)` qui prend en entrée un entier  $n$  et renvoie un  $n$ -uplet de nombres positifs dont la somme vaut 1.

**b.** Écrire une fonction d'en-tête `ST(n)` qui prend en entrée un entier  $n$  et renvoie une matrice stochastique de taille  $n$ .

**c.** Engendrer des matrices stochastiques de taille 4 ou 5 et calculer de grandes puissances. Émettre une conjecture.

---

**Exercice 4.** Pour tout  $t$  dans  $[0, +\infty[$ , on considère la matrice  $M(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

On sait que les valeurs propres de  $M(t)$  sont réelles. On les note  $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$  dans l'ordre croissant.

**a.** Écrire une fonction `spectre(t)` qui prend un flottant  $t$  en entrée et renvoie le triplet  $[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)]$ .

**b.** Représenter graphiquement les fonctions  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sur le segment  $[-3, 3]$ .

---

**Exercice 5.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\mathcal{E}_n$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  à coefficients positifs.

**a.** Écrire une fonction en Python qui prend en entrée un entier  $n$  et qui renvoie une matrice aléatoire de  $\mathcal{E}_n$ .

**b.** Utiliser cette fonction pour créer de telles matrices et afficher les valeurs propres. Commenter le signe de ces valeurs propres.

---

**Exercice 6.** Déterminer les points critiques de la fonction

$$f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

Représenter graphiquement  $f$  et conjecturer la nature des points critiques. Prouver enfin les résultats conjecturés.

---

**Exercice 7.** On définit une fonction  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$  en posant

$$\forall x \geq 0, \quad \varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(2\sqrt{x} \sin(t)) \, dt, \quad \forall x \leq 0, \quad \varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2\sqrt{-x} \sin(t)) \, dt.$$

Représenter la fonction  $\varphi$  sur  $[-3, 5]$  et sur  $[-1000, 0]$ .

---

**Exercice 8.** Soit  $(X_k)_{k \geq 1}$  une suite de variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes qui suivent la même loi. Soit  $N$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  indépendante des  $X_k$ . On définit

$$Y = \sum_{k=1}^N X_k.$$

Dans cette question, la loi des  $X_k$  est  $\mathcal{B}(50, 1/50)$  et celle de  $N$  est  $\mathcal{P}(1/12)$ .

Écrire une fonction qui simule la variable aléatoire  $Y$ . Réaliser une série de 100000 expériences. Estimer la moyenne et l'écart-type de  $Y$ .

**Exercice 9.** Soient  $n$  et  $N$  deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On dispose de  $N$  urnes et de  $n$  boules. Chaque boule est déposée dans l'une des urnes, choisie équiprobablement parmi les  $N$  urnes disponibles. Les choix sont supposés indépendants.

On note  $T_n$  la variable aléatoire égale au nombre d'urnes vides à la fin du processus.

a. Écrire une fonction d'en-tête `remplir(n, N)` qui renvoie une liste de longueur  $N$  représentant le nombre de boules dans chacune des urnes à la fin du processus.

b. Écrire une fonction d'en-tête `nb_urnes_vides(n, N)` qui renvoie le nombre d'urnes vides à la fin du processus (c'est en somme une simulation de  $T_n$ ).

c. Écrire une fonction d'en-tête `esp(n, N, taille)` qui effectue `taille` fois le processus et renvoie la moyenne de  $T_n$  sur ces expériences.

d. Prendre  $N$  égal à 10 et `taille` égal à 1000 et faire varier  $n$  de 1 à 100. Représenter graphiquement les points  $(n, \mathbb{E}(T_n))$ .

**Exercice 10. a.** Écrire une fonction `legendre(n)` qui prend en entrée un entier  $n$  et renvoie en sortie le polynôme de Legendre de rang  $n$ , défini par

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} ((X^2 - 1)^n)^{(n)}.$$

b. Écrire une deuxième fonction ayant le même objectif, cette fois en se basant sur la construction par récurrence

$$P_0 = 1, \quad P_1 = X, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} X P_n - \frac{n}{n+1} P_{n-1}.$$

**Exercice 11.** On note  $\alpha$  l'unique<sup>1</sup> l'équation  $\text{sh}(x) = 1$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$I_n = \int_0^\alpha \text{sh}^n(t) dt.$$

a. Déterminer un encadrement de  $\alpha$  de longueur  $10^{-5}$ .

b. Écrire une fonction d'en-tête `suite(n)` qui renvoie une valeur approchée de  $I_0, \dots, I_n$ .

**Exercice 12.** On considère des suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant les relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + (u_n^2) + (v_n)^2 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{v_n}{2} + (v_n)^2 + (u_n)^2.$$

a. Représenter sous forme de polygone les dix premiers termes de la suite  $(u_n, v_n)$  en effectuant les choix suivants pour le couple  $(u_0, v_0)$ .

$$(1/4, 1/5), (-1/4, 1/5), (1/4, -1/5), (1, 1/5), (1/4, 1).$$

b. Conjecturer la convergence/divergence de la suite  $((u_n, v_n))_{n \geq 0}$  selon la condition initiale.

1. Il faut bien sûr savoir justifier précisément l'existence et l'unicité de cette solution.