

**Devoir de vacances de mathématiques — PC\***
**Problème 1 — intégrales de Wallis et équivalent de Stirling (\*)**

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$ .

Le but de ce problème est de calculer cette intégrale et d'étudier la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , puis d'en déduire un équivalent de  $n!$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Première partie : les calculs classiques sur les intégrales de Wallis**

**Question 1.** Montrer que la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et que tous ses termes sont strictement positifs.

**Question 2.** Calculer les intégrales  $W_0$  et  $W_1$ .

**Question 3.** Au moyen d'une intégration par parties, obtenir la relation de récurrence suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

**Question 4.** Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , prouver l'encadrement suivant

$$\frac{n+1}{n+2} W_n \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

**Question 5.** Montrer que la suite  $((n+1)W_n W_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est constante et préciser la valeur de cette constante.

**Question 6.** Montrer que  $W_n$  est équivalent à  $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Question 7.** Pour tout  $p$  dans  $\mathbb{N}$ , prouver les relations suivantes

$$W_{2p} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p} \times (p!)^2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{2^{2p} \times (p!)^2}{(2p+1)!}.$$

**Deuxième partie : l'équivalent de Stirling**

Le but de cette partie est de prouver que  $n!$  est équivalent à  $n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on pose  $q_n = \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}}$  et  $u_n = \ln(q_n)$ .

**Question 8.** Pour tout entier  $n \geq 2$ , prouver l'égalité  $u_n - u_{n-1} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1$ .

**Question 9.** Prouver que  $u_n - u_{n-1}$  est équivalent à  $-\frac{1}{12n^2}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Question 10.** Justifier que la série de terme général  $u_n - u_{n-1}$  converge. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge.

**Question 11.** En déduire que la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  possède une limite finie  $\ell$  strictement positive.

**Question 12.** En écrivant de deux manières la limite de  $\sqrt{2p} W_{2p}$  quand  $p$  tend vers  $+\infty$ , obtenir l'égalité  $\ell = \sqrt{2\pi}$ .

**Exercice 1. (\*)** On pose  $\omega = e^{i2\pi/7}$  puis

$$S = \omega + \omega^2 + \omega^4 \quad \text{et} \quad T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$

a. Calculer  $S + T$  et  $ST$ .

b. En déduire les valeurs de  $S$  et de  $T$ .

**Problème 2 (\*)****Première partie (quelques calculs préliminaires)**

Soient  $A, B, C$  trois  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. Soient  $f \in \mathcal{L}(A, B)$  et  $g \in \mathcal{L}(B, C)$ . On note  $\varphi$  la restriction de  $g$  à  $\text{Im}(f)$ .

**Question 13.** Justifier les inclusions  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$  et  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ .

**Question 14.** Démontrer les égalités  $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$  et  $\text{Im}(\varphi) = \text{Im}(g \circ f)$ .

**Question 15.** On suppose que  $A$  est de dimension finie. Montrer l'égalité  $\dim(\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g)) = \text{rg}(f) - \text{rg}(g \circ f)$ .

**Deuxième partie (rang des itérés d'un endomorphisme)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On rappelle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la notation  $u^k$  désigne l'itérée  $k$ -ième d'ordre  $k$ , c'est-à-dire la composée  $u \circ \dots \circ u$ , dans laquelle la lettre  $u$  apparaît  $k$  fois. En particulier, la notation  $u^0$  désigne  $\text{Id}_E$ . On note  $n$  la dimension de  $E$ .

**Question 16.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , montrer les inclusions  $\text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1})$  et  $\text{Im}(u^{k+1}) \subset \text{Im}(u^k)$ .

**Question 17.** Montrer que la suite de terme général  $\delta_k = \text{rg}(u^k) - \text{rg}(u^{k+1})$  est décroissante.

**Question 18.** Montrer qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $k \geq p$ , on ait  $\delta_k = 0$ . Dans la suite, on choisit  $p$  minimal pour cette propriété.

**Question 19.** Montrer que  $\text{Ker}(u^p)$  et  $\text{Im}(u^p)$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**Question 20.** On note  $v$  la restriction de  $u$  à  $\text{Im}(u^p)$ . Montrer que  $v$  est un automorphisme de  $\text{Im}(u^p)$ .

**Troisième partie (endomorphismes nilpotents)**

On reprend les notations de la deuxième partie, notamment l'endomorphisme  $u$  de  $E$  et l'entier  $p$ . On suppose de plus que  $u$  est *nilpotent*, ce qui signifie qu'il existe un entier  $s$  tel que  $u^s$  soit l'application nulle.

**Question 21.** Montrer que  $u^p$  est l'application nulle mais pas  $u^{p-1}$ .

**Question 22.** Montrer l'inégalité  $p \leq n$ .

**Question 23.** Dans cette question, on ajoute l'hypothèse  $p = n$ . On considère un vecteur  $x$  de  $E$  tel que  $u^{p-1}(x) \neq 0_E$  et on lui associe la famille de vecteurs  $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ .

Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  et écrire la matrice de  $u$  relativement à cette base.

**Problème 3 (\*\*)**

On pose  $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ . On lui associe les sous-espaces vectoriels

$$F = \{f \in E ; f(0) = f(1) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{f \in E ; f'' = f\}.$$

Pour tout couple  $(f, g)$  d'éléments de  $E$ , on pose  $(f|g) = \int_0^1 (fg + f'g')$ .

**Question 24.** Montrer que  $(|)$  est un produit scalaire sur  $E$ .

**Question 25.** Déterminer une base orthonormée de  $G$ .

**Question 26.** Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires et orthogonaux dans  $E$ .

**Question 27.** Donner l'expression de la projection orthogonale sur  $G$ .

**Problème 3 — inégalité de Jensen (\*)**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non trivial. Soit  $f$  une fonction définie de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , supposée convexe.

**Question 28. (\*\*)** Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, prouver l'énoncé  $(C_n)$  suivant : pour tout  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  d'éléments de  $I$ , pour tout  $n$ -uplet  $(t_1, \dots, t_n)$  d'éléments de  $[0, 1]$  dont la somme vaut 1, l'inégalité

$$f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n t_k f(x_k)$$

est valable.

On raisonnera par récurrence.

**Question 29.** Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On suppose que l'univers image  $X(\Omega)$  est inclus dans  $I$ . Montrer alors l'inégalité

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

**Question 30.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  de nombres strictement positifs, justifier l'inégalité arithmético-géométrique

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

**Problème 4 — théorème de Cesàro (\*\*)**

**Question 31. (\*\*\*)** On considère une suite complexe  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On suppose que cette suite converge et on note sa limite  $\ell$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $m_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k$ . Montrer que la suite  $(m_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\ell$ .

Cette propriété est le *théorème de Cesàro*.

**Question 32.** Soit  $a > 0$ . On considère une fonction  $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  à valeurs positives. On suppose qu'il existe des constantes  $\lambda \neq 0$  et  $p > 1$  telles que

$$f(x) = x + \lambda x^p + o_{x \rightarrow 0}(x^p).$$

Trouver un exposant  $\alpha$  tel que  $(f(x))^\alpha - x^\alpha$  possède une limite finie et non nulle lorsque  $x$  tend vers 0.

**Question 33.** On définit une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en prenant  $u_0 \in ]0, \pi/2]$  et en posant  $u_{n+1} = \sin(u_n)$ .

- Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.
- Trouver un exposant  $\alpha$  tel que la suite de terme général  $(u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha$  possède une limite finie et non nulle.
- À l'aide du théorème de Cesàro, en déduire un équivalent de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 2. (\*)** Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$  non vide et majorée. Soit  $\lambda \geq 0$ .

On note  $\lambda A$  l'ensemble  $\{\lambda x ; x \in A\}$ .

Montrer l'égalité  $\sup(\lambda A) = \lambda \times \sup(A)$ .

**Exercice 3. (\*\*)** Soit  $C$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant l'identité

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det(C + M) = \det(M).$$

Montrer que  $C$  est la matrice nulle.

**Exercice 4. (\*\*\*)** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Montrer qu'il existe une suite extraite de la suite complexe  $(e^{i \ln(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$  qui converge vers  $e^{i\alpha}$ .

**Problème 5 — réarrangement de la somme d'une suite sommable (\*\*\*)**

On considère une suite complexe  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et on suppose que la série  $\sum z_n$  est absolument convergente. Le but de cet exercice est de prouver que pour toute bijection  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$  sur  $\mathbb{N}$ , la série  $\sum z_{\varphi(n)}$  converge absolument et qu'elle a la même somme que la série  $\sum z_n$ .

On considère donc une bijection  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  et on pose  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ .

On fixe  $\varepsilon > 0$ .

**Question 34.** Prouver qu'il existe un entier  $n_0$  vérifiant la propriété

$$\forall n \geq n_0, \quad \sum_{k=n}^{+\infty} |z_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

**Question 35.** Prouver qu'il existe un entier  $n_1$  tel que l'inclusion

$$[0, n_0] \subset \{\varphi(0), \dots, \varphi(n_1)\}$$

soit vraie.

**Question 36.** Pour tout entier  $n \geq n_1$ , prouver la majoration

$$\left| S - \sum_{k=0}^n z_{\varphi(k)} \right| \leq \varepsilon.$$

**Question 37.** Conclure.

**Sudoku « PC\* 2023-2024 »**

Chaque ligne, chaque colonne et chaque carré  $3 \times 3$  délimité en gras contiennent exactement une fois chaque chiffre de 1 à 9.

Le long de chaque thermomètre, les chiffres augmentent strictement en partant du bulbe. L'étoile dans le coin supérieur droit est la superposition de huit thermomètres issus du centre de l'étoile.

Chaque nombre accompagné d'une flèche est la somme des chiffres sur la mini-diagonale indiquée par la flèche.

Chaque nombre dans la marge est la somme des chiffres pris en sandwich entre le 1 et le 9 de la ligne/colonne correspondante.

Lien (cliquable) pour résoudre ce problème en ligne : <https://tinyurl.com/22tmexcr>

Pour me contacter : [edouardlebeau-pc@yahoo.fr](mailto:edouardlebeau-pc@yahoo.fr) ou Édouard Lebeau#3705 sur Discord.

Site de la classe (lien cliquable) : [https://cahier-de-prepa.fr/pc\\*-poincare](https://cahier-de-prepa.fr/pc*-poincare)

Serveur Discord de la classe (lien cliquable) : <https://discord.gg/C5zBTvk7>