

CHAPITRE 7 : TRANSFERTS THERMIQUES DIFFUSION THERMIQUE

I. Phénoménologie des transferts thermiques

1. Température locale

La température T est une variable d'état.

A l'équilibre, elle est donc uniforme.

Dans ce chapitre, on étudie des phénomènes hors équilibre.

Dès lors $T(x, t)$. C'est la température locale

2. Différents types de transferts thermiques

(cf. polycopié)

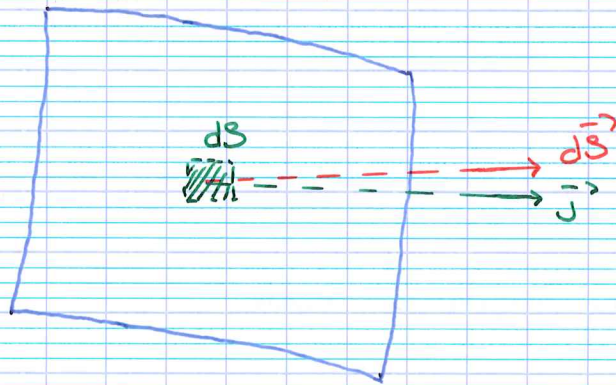
Le retour vers l'équilibre se fait par échange de chaleur par transferts thermiques.

Il y en a 3 sortes.

- * Diffusion thermique (exemple : fourchette qui se réchauffe jusqu'au manche même si uniquement le bout est proche d'une source de chaleur), aussi appelée conduction.
- * Convection thermique (exemple : eau en mouvement dans une casserole).
- * Rayonnement thermique.

Dans ce chapitre, on étudiera seulement la diffusion thermique.

3. Flux thermique et vecteur \vec{j}



Pendant dt , la surface S est traversée par :



$$\delta Q = \phi dt$$

S S

flux thermique ou puissance thermique
(en W, i.e. $J.s^{-1}$).

On introduit ϕ tel que :



$$\phi = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$
$$d\phi = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

vecteur densité de flux thermique
(en $W.m^{-2}$).

Souvent,

$$\phi = jS$$

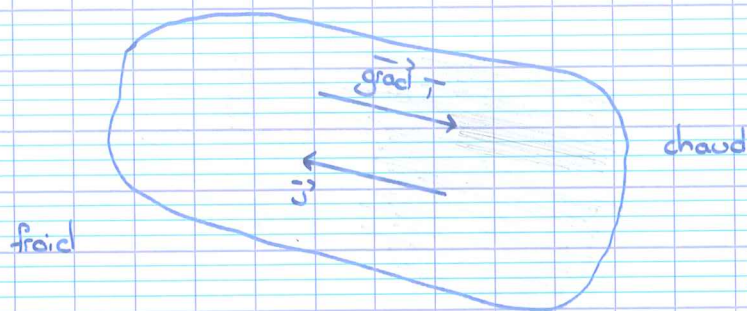
ou

$$\phi = -jS$$

4. Loi de Fourier

(cf. table 1)

On parle de « conduction thermique ».



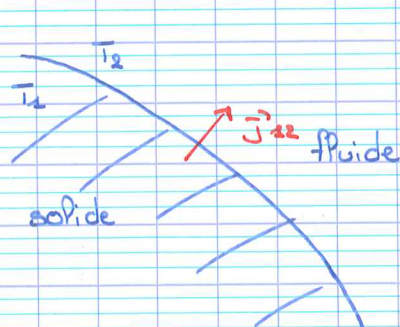
On postule :



$$\vec{j} = - \lambda \overrightarrow{\text{grad } T}$$

W.m^{-2} K.m^{-1}
 conductivité du matériau
 (en $\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$)

5. Loi de Newton (fournie)



T_1 et T_2 mesurées près
de la surface.

On observe une discontinuité de température, cette discontinuité est associée aux échanges thermiques

À au signe, j doit aller du plus chaud vers le plus froid.



On pose : $\vec{j}_{12} = h(\bar{T}_1 - \bar{T}_2) \vec{u}_{12}$

h est appelé :

coefficient de Newton

ou coefficient conducto-conductif.

$$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

(coefficient qui dépend des matériaux et de la vitesse (d'écoulement du fluide)).

Un contact thermique parfait est défini par :

$$\bar{T}_1 = \bar{T}_2 \quad \text{et} \quad h \rightarrow +\infty$$

(car j est borné).

Méthode pour ce chapitre :

On effectue un bilan d'énergie en appliquant le premier principe à un domaine habilement choisi.

En régime variable, choisir un domaine infinitésimal.

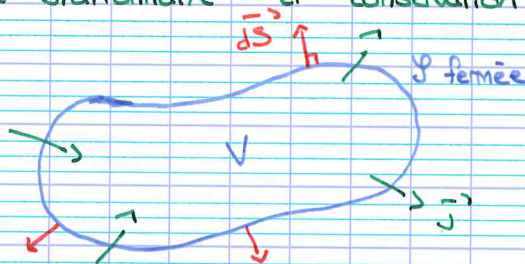
En régime stationnaire, un domaine étendu est souvent plus habile.

II. Etude de régimes stationnaires

$$\bar{T}(Y, X)$$

Toutes les fonctions d'état, dans une région donnée, restent constantes.

1. Régime stationnaire et conservation du flux.



Pendant dt , V reçoit δQ .

$$\begin{aligned}\delta Q &= -\dot{\phi} dt \\ &= -\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} dt\end{aligned}$$

$$\delta W = 0 \quad \text{le plus souvent.}$$

$$\text{1er pp : } dU = \underbrace{\delta W}_0 + \delta Q$$

(23)

$$\text{donc } \delta Q = 0$$

$$\text{donc } \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0$$

→ Le flux de \vec{j} est conservatif.
(= flux de chaleur)

2. Diffusion unidimensionnelle

(cf. figure 1)

$$\begin{aligned}\text{1D } T(x) \\ \vec{j} = j(x) \vec{u}_x \qquad j(x) = -\lambda \frac{dT}{dx}\end{aligned}$$

Pendant dt , le système reçoit :

$$\begin{aligned}\delta Q &= -\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} dt \\ &= j(x) S dt - j(x') S dt \\ &= (j(x) S - j(x') S) dt\end{aligned}$$

$$\delta W = 0$$

$$dU = \delta W + \delta Q$$

" (car δS)

donc $\delta Q = 0$

donc $j(\alpha)S = j(\alpha')S$

donc $j(\alpha) = j(\alpha')$

$$\exists j_0, \forall \alpha \in [0, L], j(\alpha) = j_0$$

$$-\lambda \frac{dT}{d\alpha} = j_0$$

donc $T = -\frac{j_0}{\lambda} \alpha + C$

Avec les conditions de bords, on trouve :

$$T = \frac{T_2 - T_1}{L} \alpha + T_1$$

$$-\frac{j_0}{\lambda} = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

donc $j_0 = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L}$

3. Exemple à symétrie cylindrique

(cf. FIGURE 2)

$$T(r, \theta, z) \quad r \in [R_1; R_2] \quad \vec{j} = j(r) \vec{u}_r$$

Pendant dt , le système reçoit,

$$\begin{aligned} \delta Q &= \left[\int_{S_r} j(r) \vec{u}_r \cdot d\vec{S}_{u_r} + \int_{S_{r'}} j(r') \vec{u}_r \cdot d\vec{S}(-\vec{u}_r) \right] dt \\ &= \left[\int j(r) dS - \int j(r') dS \right] dt \end{aligned}$$

$$\text{donc } \delta Q = [j(r)S(r) - j(r')S(r')] dr$$

$$\text{où } S(r) = 2\pi r h$$

$$1^{\text{er}} \text{ pp : } \underset{0}{dU} = \delta W + \delta Q \quad \text{or } \delta W = 0$$

$$\text{donc } dQ = 0$$

$$\text{donc } j(r)S(r) = j(r')S(r')$$

$$\exists \phi_0, \forall r \in [r_1, r_2], j(r)S(r) = \phi_0$$

$$\text{donc } j(r) = \frac{\phi_0}{2\pi r h}$$

$$\text{Loi de Fourier : } -\lambda \frac{dT}{dr} = \frac{\phi_0}{2\pi r h}$$

$$\text{donc } T = \underbrace{A}_{-\frac{\phi_0}{2\pi h \lambda} \ln(r)} + C$$

$$\text{Conditions de bord : si } r = r_1, T = T_1 \quad | \quad \text{si } r = r_2, T = T_2$$

$$\begin{cases} T_1 = -\frac{\phi_0}{2\pi h \lambda} \ln(r_1) + C \\ T_2 = -\frac{\phi_0}{2\pi h \lambda} \ln(r_2) + C \end{cases}$$

$$\text{donc } T_1 - T_2 = \frac{\phi_0}{2\pi h \lambda} (\ln(r_2) - \ln(r_1))$$

$$\text{donc } \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{\phi_0}{2\pi h \lambda}$$

$$\text{donc } T = \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)} \ln(r) + C$$

$$\begin{aligned} \text{donc } C &= T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)} \ln(r_1) \\ &= \frac{T_1 \ln(r_2) - T_2 \ln(r_1)}{\ln(r_2/r_1)} \end{aligned}$$

$$d'où \quad \bar{T} = \frac{\bar{T}_2 - \bar{T}_1}{\ln(r_2/r_1)} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + \bar{T}_1$$

Variante :

$$r' = r + dr$$

$$\begin{aligned} \delta Q &= \left[j(r) 2\pi r h - j(r+dr) 2\pi (r+dr) h \right] dt \\ &= 2\pi h dt \left[r j(r) - (r+dr) j(r+dr) \right] \\ &= \underbrace{-d(r j(r))} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \delta Q = -2\pi h dt d(r j(r))$$

$$\text{donc } d(r j(r)) = 0$$

$$\exists K, \quad r j(r) = K$$

$$\text{donc } j(r) = \frac{K}{r} \quad (\text{suite idem})$$

Variante' :

Discontinuité en R_2

$$\bar{T}_2 = \bar{T}(R_2^+) \quad \text{air donnée}$$

$$\bar{T}(R_2^-) \quad \text{inconnue}$$

Seule la condition de bord en R_2 est à revoir

Loi de Newton :

$$j(R_2) = h_N (\bar{T}(R_2^-) - \bar{T}_2) \vec{u}_r$$

ne pas confondre avec $\rho_e h$
de la hauteur

$$\text{or } 2\pi r h j(r) = \Phi_0 = -2\pi h \lambda A$$

$$\text{donc } j(r) = \frac{-\lambda A}{r}$$

CB en R_2 :
$$-\frac{\lambda A}{R_2} = h_w (A h(R_2) + C - \bar{T}_2)$$

$$A (h(R_2) + \frac{\lambda}{h_w R_2}) + C = \bar{T}_2$$

il suffit de reprendre le calcul de A et de C.
 (CB en R_1 : $A h(R_1) + C = \bar{T}_1$ toujours valable).

4. Formulation locale par opérateur divergence
 (cf. FIGURE 3)

Pendant dt, le système reçoit :

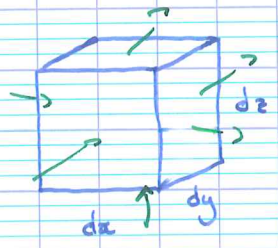
$$\begin{aligned} \delta Q &= j(x) S dt - j(x+dx) S dt \\ &= - S dt (j(x+dx) - j(x)) \\ &= - S dt dx \frac{dj}{dx} \end{aligned}$$

$\delta W = 0$

1^{er} pp :
$$\begin{aligned} dU &= \delta W + \delta Q \\ &= 0 \\ &\text{(28)} \end{aligned}$$

donc $\frac{dj}{dx} = 0$

Cas 3D :
$$\vec{j} = \begin{pmatrix} j_x(x,y,z) \\ j_y(x,y,z) \\ j_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} \delta Q &= -d\phi_{\text{sort}} dt \\ d\phi_{\text{sort}} &= \left(\frac{dj_x}{dx} + \frac{dj_y}{dy} + \frac{dj_z}{dz} \right) d\vec{\tau} \\ &= \text{div} \vec{j} d\vec{\tau} \end{aligned}$$

Par le premier principe, on justifie :

$$\delta Q = 0$$

$$\text{donc } \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

\vec{j} est à flux conservatif.

$$\text{donc } \operatorname{div} (-\lambda \operatorname{grad} T) = 0$$

$$\text{donc } \Delta T = 0$$

↑
laplacien

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

$$r \frac{dT}{dr} = E$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{E}{r}$$

$$\text{donc } T = \underbrace{Eh(r)}_A + \underbrace{F}_C$$

5. Exemple de situation avec source volumique d'énergie (cf. FIGURE 4)

Certains phénomènes mettent en jeu une source locale d'énergie. On note ρ la puissance volumique associée.

en $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$

Il faut le prendre en compte dans le 1^{er} pp.

On recherche $T(r)$ où $r \in [0; \infty[$.

* $r \in [0; R[$.

Comme $\vec{T} = T(r)\vec{e}_r$, $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$.

$$\begin{aligned}\delta Q &= - \oint \vec{j} \cdot d\vec{S} dt \\ &= -j(r) \times 4\pi r^2 dt\end{aligned}$$

$$\delta Q' = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3 dt$$

1^{er} pp :
$$\frac{dU}{dt} = \delta W + \delta Q_{tot}$$

donc $0 = -j(r)4\pi r^2 dt + \rho \frac{4}{3}\pi r^3 dt$.

donc $j(r) = \frac{\rho r}{3}$

Ici, \vec{j} n'est pas à flux conservatif, ce à cause de la production d'énergie.

Loi de Fourier :

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{j}{\lambda_1} = -\frac{\rho r}{3\lambda_1}$$

donc $T = -\frac{\rho r^2}{6\lambda_1} + A$

* $r \in]R; +\infty[$.

On pourrait faire un bilan sur une région //

avec $R < r, r' < \infty$.

Mais soyons plus malin!



$$\Sigma = \{ \text{boule de rayon } r > R \}$$

Pendant dt , le système reçoit :

$$\delta Q_{\text{tot}} = -j(r) 4\pi r^2 dt + \rho \frac{4}{3} \pi R^3 dt$$

$$1^{\text{er}} \text{ principe : } \delta Q_{\text{tot}} = 0$$

$$\text{donc } j(r) = \rho \frac{R^3}{3r^2}$$

Loi de Fourier :

$$\frac{dT}{dr} = \frac{-j}{\lambda_2} = -\rho \frac{R^3}{3\lambda_2 r^2}$$

$$\text{donc } T = \frac{\rho R^3}{3\lambda_2 r} + B$$

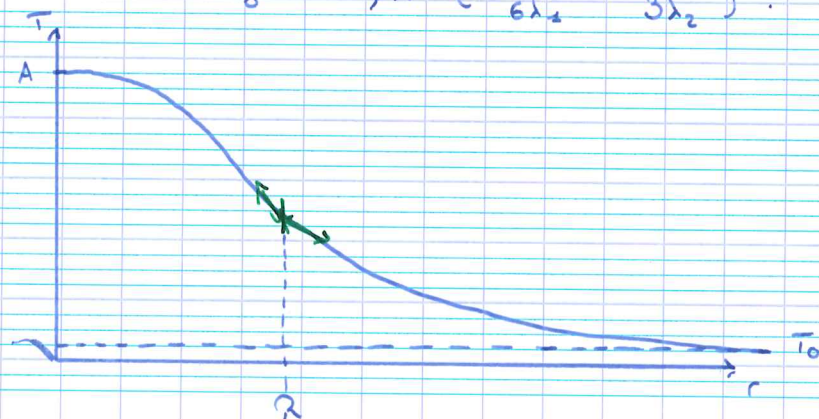
$$\text{CB : } r \rightarrow \infty$$

$$T_0 = B$$

T est continue en R :

$$-\frac{\rho R^3}{6\lambda_1} + A = \frac{\rho R^3}{3\lambda_2} \times \frac{1}{R} + T_0$$

$$\text{donc } A = T_0 + \rho R^2 \left(\frac{1}{6\lambda_1} + \frac{1}{3\lambda_2} \right)$$



On remarque que $j(\mathbb{R}^-) = j(\mathbb{R}^+)$.

Dans certains exercices, il faut penser à utiliser la continuité de \vec{j} .

Variante : $\Sigma = \{\text{eau}\}$.

Dans l'eau, on pourrait simplement résoudre $\text{div} \vec{T} = 0$
laplacien

$$\text{donc } \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

$$\text{donc } r^2 \frac{dT}{dr} = E$$

$$T = -\frac{E}{r} + F$$

On trouvera E par la continuité de \vec{j} .

III. Résistance thermique

Conduction thermique en régime stationnaire.

1. Concepts de résistance et de conductance

(cf. FIGURE 5)

En régime permanent, $\phi_e = \phi_s = \phi$.

→ Le flux est conservatif.

Le flux ϕ parcourt la matière de la zone de température T_1 à celle de température T_2 .

ϕ est proportionnel à $T_1 - T_2$.

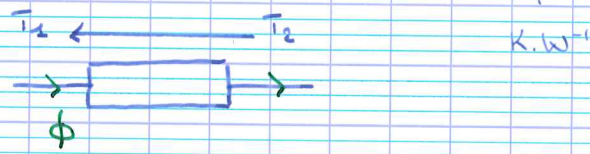
On pose donc $\phi = G (T_1 - T_2)$.

$W \cdot K^{-1}$ (conductance)





On a aussi : $\boxed{\bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2 = 2\phi}$ où $R = \frac{1}{G}$



2. Exemples à connaître

A. Mur (cf. II.2.)

(cf. FIGURE 6)

à savoir justifier ! ϕ est $\vec{j} = j \vec{u}_x$ $j = \frac{\phi}{S}$

Loi de Fourier :

$$\frac{d\bar{T}}{dx} = -\frac{j}{\lambda S} = -\frac{\phi}{\lambda S}$$

$$\int_{\bar{T}_2}^{\bar{T}_1} d\bar{T} = \int_0^L -\frac{\phi}{\lambda S} dx$$

$$\text{donc } \bar{T}_1 - \bar{T}_2 = -\frac{\phi}{\lambda S} L$$

$$\text{donc } \bar{T}_1 - \bar{T}_2 = \frac{L}{\lambda S} \phi$$



$$\boxed{\text{d'où } R = \frac{L}{\lambda S}}$$

B. Manchon cylindrique

(cf. FIGURE 7)

$$\phi \text{ est } \phi = 2\pi r h j$$

$$j = \frac{\phi}{2\pi r h}$$

donc, d'après la loi de Fourier :

$$\frac{dT}{dr} = \frac{-\phi}{2\pi r h \lambda}$$

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{-\phi}{2\pi \lambda h} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$$

$$\text{donc } T_2 - T_1 = \frac{-\phi}{2\pi \lambda h} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$$\text{donc } T_1 - T_2 = \frac{1}{2\pi \lambda h} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \phi$$

→

$$\text{donc } R = \frac{1}{2\pi \lambda h} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

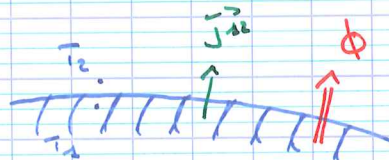
très pratique pour calculer les pertes liées à la gaine !

$$\text{A.N. } T_1 = 40^\circ\text{C} \quad T_2 = 10^\circ\text{C}$$

$$R = 10 \text{ K}\cdot\text{W}^{-1} \quad G = 0,1 \text{ W}\cdot\text{K}^{-1}$$

$$\phi = G(T_1 - T_2) = 3 \text{ W}$$

C.



$$j_{12} = h(T_1 - T_2)$$

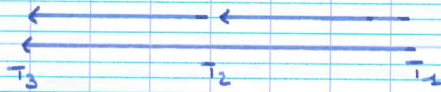
$$\phi = hS(T_1 - T_2)$$

$$\text{donc } \underline{G = hS}$$

3. Lois de Kirchoff et Lois d'associations (cf. TABLE 2)

* La Loi des mailles est aussi valable ici.

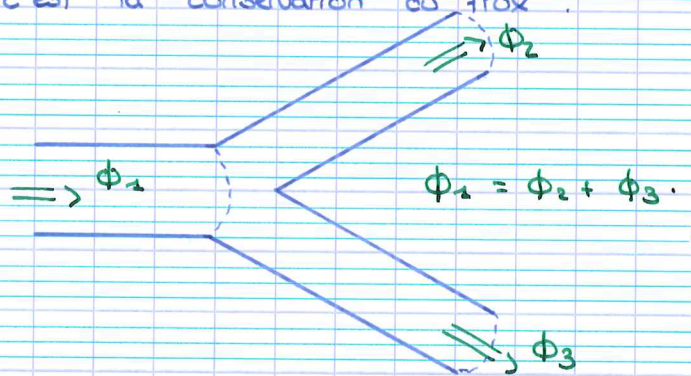
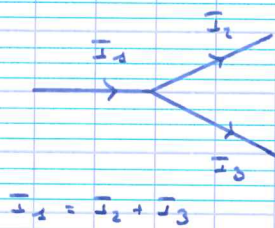
$$\bar{T}_3 - \bar{T}_1 = (\bar{T}_3 - \bar{T}_2) + (\bar{T}_2 - \bar{T}_1)$$



* Loi des nœuds : c'est la conservation du flux.

* En série :
R s'additionnent

* En // :
G s'additionnent.



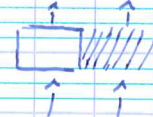
* Les lois d'associations s'appliquent donc aussi.

4. Exemple d'application



* Association série : les couches d'un mur d'une maison.

* Association parallèle : une fenêtre et un mur



Application : double-vitrage (association série)

(cf. FIGURE 8)

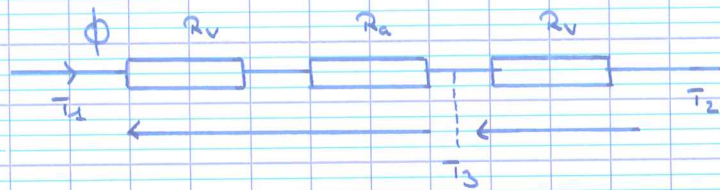
$$R = R_v + R_a + R_v$$

$$= \frac{e/G}{\lambda_v S} + \frac{2e/3}{\lambda_a S} + \frac{e/G}{\lambda_v S}$$

donc $R = \frac{e}{3S} \left(\frac{1}{\lambda_v} + \frac{2}{\lambda_a} \right)$

λ_a petit veut dire R grand
 = intérêt du double vitrage.

A.N. $\bar{T}_1 = 20^\circ\text{C}$ $\bar{T}_2 = 0^\circ\text{C}$



$$\phi = \frac{\bar{T}_1 - \bar{T}_2}{R}$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_3 - \bar{T}_2 &= R_v \phi \\ &= \frac{R_v (\bar{T}_1 - \bar{T}_2)}{R_v + R_a + R_v} \\ &= \frac{R_v (\bar{T}_1 - \bar{T}_2)}{R} \quad (\text{pont diviseur}) \quad \frac{R_v}{R} \ll 1 \end{aligned}$$

L'écart de température se fait surtout sur la couche d'air.

5. Tableau d'analogie détaillé avec l'électricité.
 (cf. TABLE 2)

IV. Etude de régimes non stationnaires

1. Bilan thermique et équation de la chaleur à une dimension.
 (cf. figure 9).

$$\vec{T}(\alpha, t) \quad \vec{j} = j(\alpha, t) \vec{u}_\alpha$$

Pendant dt , le système reçoit :

$$+ \delta Q = j(\alpha, t) S dt - j(\alpha + d\alpha, t) S dt$$

$$\star \delta W = \rho S dx dt$$

U varie de :
 $dU \stackrel{?}{=} dt = "C_p dT"$
 car phase condensée

or $C_p = c_p \mu S dx$
 et $dT = T(\alpha, t+dt) - T(\alpha, t)$

1^{er} pp : $dU = \mu S c_p dx (T(\alpha, t+dt) - T(\alpha, t))$

1^{er} pp : $dU = \delta Q + \delta W$

$$\mu S c_p dx \left[\frac{T(\alpha, t+dt) - T(\alpha, t)}{dt} \right] = \left[\frac{j(\alpha, t) - j(\alpha+dx, t)}{dx} \right] S dx + \rho S dx dt$$

→ Ainsi, $\mu c_p \frac{dT}{dt} = -\frac{dj}{dx} + \rho$ **BILAN**

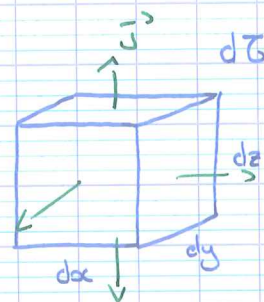
$$\mu c_p \frac{dT}{dt} + \frac{dj}{dx} = \rho$$

Loi de Fourier : $j = -\lambda \frac{dT}{dx}$

→ donc $\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{\mu c_p}{\lambda} \frac{dT}{dt} = -\frac{\rho}{\lambda}$

2. Généralisation

$$\bar{T}(x, y, z, t) \quad \vec{j} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$



Pendant dt , le système reçoit :

$$\begin{aligned} * \delta Q &= -\text{div} \vec{j} \, dV dt \\ * \delta W &= \rho \, dV dt \\ * dU &= "C dT" \\ &= \rho \, dV c_p [\bar{T}(x, t+dt) - \bar{T}(x, t)] \end{aligned}$$

$$1^{\text{er}} \text{ principe : } dU = \delta W + \delta Q$$

$$\rho \, dV c_p [\bar{T}(x, t+dt) - \bar{T}(x, t)] = -\text{div} \vec{j} \, dV dt + \rho \, dV dt$$

$$\text{donc } \rho c_p \frac{\delta T}{\delta t} + \text{div} \vec{j} = \rho$$

$$\text{Loi de Fick : } \vec{j} = -\lambda \text{grad} \bar{T}$$



$$\Delta \bar{T} - \frac{\rho c_p}{\lambda} \frac{\delta \bar{T}}{\delta t} = -\frac{\rho}{\lambda}$$

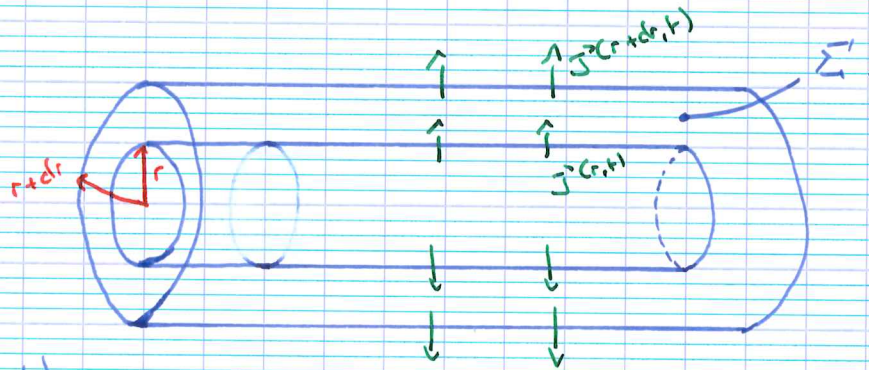
Equation à résoudre en fonction des conditions initiales.

→ Utilisable également en coordonnées cylindriques ou sphériques.

En coordonnées cylindriques, si $\bar{T} = T(r, t)$.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\delta \bar{T}}{\delta r} \right) - \frac{\rho c_p}{\lambda} \frac{\delta \bar{T}}{\delta t} = -\frac{\rho}{\lambda}$$

On peut le retrouver :



$$T(r, t)$$

$$\vec{j} = j(r, t) \vec{e}_r$$

$$\begin{aligned} \delta Q &= j(r, t) 2\pi r P dt - j(r+dr, t) 2\pi (r+dr) P dt \\ &= 2\pi P dt [r j(r, t) - (r+dr) j(r+dr, t)] \end{aligned}$$

$$\delta W = p 2\pi r dr dt$$

$$\delta U = \rho c_p P 2\pi r dr [T(r, t+dt) - T(r, t)]$$

1^{er} principe : $dU = \delta W + \delta Q$

$$\rho c_p r dr [T(r, t+dt) - T(r, t)] = p r dr dt + dt [r j(r) - (r+dr) j(r+dr)]$$

$$\text{donc } \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = p + \frac{1}{r} \left(- \frac{\partial}{\partial r} (r j(r)) \right)$$

$$\vec{j} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \quad (\text{Loi de Fourier})$$

$$\text{donc } \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + p = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

idem !

3. Exemple : choc thermique
(cf. FIGURE 10)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\rho c_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

On pose $D = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) le coefficient de diffusion thermique.

Avec $\cdot \forall z \geq 0, t = 0 \quad T(z, 0) = T_0$
 $\forall t > 0, z = 0 \quad T(0, t) = T_1$.

La solution est $T(z, t) = T_1 + (T_0 - T_1) \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}} \right)$.

On vérifie que T est solution :

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-\xi^2} d\xi$$

$$\cdot \frac{\partial T}{\partial t} = (T_0 - T_1) \frac{z}{2\sqrt{D}} \left(-\frac{1}{2} t^{-3/2} \right) \operatorname{erf}' \left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}} \right)$$

$$\operatorname{erf}'(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$$

$$\operatorname{erf}''(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (-2u) e^{-u^2}$$

Condition initiale :

$$t \rightarrow 0, z > 0$$

$$\text{erf}(\dots) \rightarrow 1$$

$$T(z, t) \rightarrow T_0 \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

$$z = 0, t \neq 0$$

$$\text{erf}(\dots) = 0$$

$$T(z, t) = T_1 \quad \underline{\underline{\text{OK}}}$$

(cf. FIGURE 11)

Ces courbes montrent que des couches de plus en plus profondes s'échauffent au fil du temps.

L'épaisseur δ de la couche échauffée est définie par :

$$T(\delta(t), t) = \frac{T_0 + T_1}{2}$$

$$\text{donc } T_1 + (T_0 - T_1) \text{erf}\left(\frac{\delta}{2\sqrt{\alpha t}}\right) = \frac{T_0 + T_1}{2}$$

$$(T_0 - T_1) \text{erf}\left(\frac{\delta}{2\sqrt{\alpha t}}\right) = \frac{T_0 - T_1}{2}$$

$$\text{erf}\left(\frac{\delta}{2\sqrt{\alpha t}}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha t}} \approx \frac{1}{2} \quad (\text{car } \text{erf}\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{2})$$

→

$$\text{donc } \delta(t) = \sqrt{\alpha t}$$

Comportement en \sqrt{t} bien visible sur Pa FIGURE 11.

4. Longueur de diffusion

L'équation de la chaleur est une équation de diffusion.

$$D = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$$

$$\Delta T - \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\rho}{\lambda}$$



On peut appliquer la loi d'échelle :

$$L \approx \sqrt{Dt}$$

Analyse de l'ordre de grandeur :

