

CHAPITRE 9 : CHANGEMENTS DE REFERENTIEL EN MECANIQUE

I. Aspect cinématique

1. Mouvement et référentiel

Le mouvement est un concept relatif.

Il est défini par la donnée d'un référentiel.

On appelle référentiel un système d'axes liés à un observateur possédant une horloge.

$$\mathcal{R} (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z) \text{ et } t.$$

où O vu immobile.

$$\text{et } \left. \frac{d\vec{u}_x}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{0} ; \left. \frac{d\vec{u}_y}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{0} ; \left. \frac{d\vec{u}_z}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{0}.$$

On exclut tout phénomène relativiste au sens d'Einstein : on suppose le temps absolu.

2. Transformation de Galilée (1564-1642).

Principe de Galilée : Quand deux référentiels sont en translation rectiligne uniforme (TRU) l'un par rapport à l'autre, les lois de la physique s'y expriment de manière identique.

A. Translation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} .

\mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} si : $\left. \frac{d\vec{u}'_x}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$
(idem pour \vec{u}'_y et \vec{u}'_z).

Les axes du nouveau référentiel gardent une direction fixe par rapport à l'ancien.

On choisit par commodité :

$$\begin{cases} \vec{u}_x' = \vec{u}_x \\ \vec{u}_y' = \vec{u}_y \\ \vec{u}_z' = \vec{u}_z \end{cases} = \text{les deux référentiels ont leurs axes parallèles.}$$

3. Mouvement colinéaire à un axe de coordonnée

(cf. FIGURE 1)

O' se meut dans R .

$$\vec{v}(O'/R) = \vec{v}_e(t) \\ \text{vitesse d'entraînement}$$

La translation est rectiligne uniforme si $\vec{v}_e = v_e \vec{e}_x$.

$$\vec{v}_e = v_e \vec{u}_x \quad \text{à } t=0, O' = O.$$

M point matériel

Dans R : $M(x, y, z, t)$

Dans R' : $M(x', y', z', t)$.

D'évidence, $y' = y$ et $z' = z$.

$$x = \overline{OH} = \overline{OO'} + \overline{O'H}$$

$$\text{donc } x = v_e t + x'$$

$$\text{i.e. } x' = x - v_e t$$

Transformation de Galilée :

$$x' = x - v_e t ; y' = y ; z' = z.$$

①

C. Mouvement dans une direction quelconque

(cf. FIGURE 2)

On se place toujours dans le cas d'une TRU.

$$\vec{OH}' = \vec{OO}' + \vec{O'H}$$

$$\vec{OH}' = \vec{v}_e t + \vec{O'H}$$

$$\begin{cases} x = v_{ex} t + x' \\ y = v_{ey} t + y' \\ z = v_{ez} t + z' \end{cases}$$

donc,

$$\begin{cases} x' = x - v_{ex} t \\ y' = y - v_{ey} t \\ z' = z - v_{ez} t \end{cases} \quad (*)$$

D. Composition des vitesses

But : relier $\vec{v}(M/R)$ à $\vec{v}(M/R')$.

$$\begin{aligned} * \vec{v}(M/R) &= \left. \frac{d\vec{OH}'}{dt} \right|_R = \left. \frac{d}{dt} (x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z) \right|_R \\ &= \left. x\vec{u}_x + x \frac{d\vec{u}_x}{dt} \right|_R + \left. y\vec{u}_y + y \frac{d\vec{u}_y}{dt} \right|_R + \left. z\vec{u}_z + z \frac{d\vec{u}_z}{dt} \right|_R \\ &= \left. \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z \right|_R \end{aligned}$$

$$* \vec{v}(M/R') = \left. \dot{x}'\vec{u}_x + \dot{y}'\vec{u}_y + \dot{z}'\vec{u}_z \right|_{R'}$$

En dérivant (*),

$$\begin{cases} \dot{x}' = \dot{x} - v_{ex} \\ \dot{y}' = \dot{y} - v_{ey} \\ \dot{z}' = \dot{z} - v_{ez} \end{cases}$$

$$\text{donc } \vec{v}(M/R') = (x - v_{e_x}) \vec{u}_x + (y - v_{e_y}) \vec{u}_y + (z - v_{e_z}) \vec{u}_z$$

$$\text{donc } \vec{v}(M/R') = \vec{v}(M/R) - \vec{v}_e$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\vec{v}(M/R) = \vec{v}(M/R') + \vec{v}_e}$$



E. Exemples

(cf. FIGURE 3)

$$v_e = 30 \text{ km.h}^{-1}$$

$$v(M/R') = 10 \text{ km.h}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } v(M/R) &= 10 + 30 \\ &= 40 \text{ km.h}^{-1} \end{aligned}$$

Si $\vec{v}(M/R') = \vec{0}$, $\vec{v}(M/R) = \vec{v}_e$, le personnage est entraîné par le train, d'où le nom de vitesse d'entraînement.

(cf. FIGURE 4)

On cherche la vitesse v_2 de la balle après le rebond.

On considère un rebond élastique sur un support fixe : la vitesse change de sens et préserve sa norme.

$$R' \text{ (wagen) : } \vec{v}_e = -v_0 \vec{u}_x$$

$$\begin{aligned} \vec{v}(M/R') &= \vec{v}(M/R) - \vec{v}_e \\ &= v_1 \vec{u}_x - (-v_0 \vec{u}_x) \\ &= (v_1 + v_0) \vec{u}_x \end{aligned}$$

Après le rebond :

$$\vec{v}_{\text{après}} (M/R') = - (v_1 + v_0) \vec{u}_x$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\text{après}} (M/R) &= \vec{v}_{\text{après}} (M/R') + \vec{v}_c \\ &= - (v_1 + v_0) \vec{u}_x - v_0 \vec{u}_x \\ &= - (v_1 + 2v_0) \vec{u}_x \end{aligned}$$

A.N. $v_0 = 100 \text{ km.h}^{-1}$

$v_1 = 20 \text{ km.h}^{-1}$

$$\| \vec{v}_{\text{après}} (M/R) \| = 220 \text{ km.h}^{-1}$$

Dans R , $\Delta E_c > 0$, alors que dans R' , $\Delta E_c = 0$.
Le travail de la force de contact dépend du référentiel.

F. Invariance galiléenne de la seconde loi de Newton

Dans F.P.D., on avait :

$$\sum \ddot{x}_i \vec{u}_i = \sum \ddot{x}'_i \vec{u}'_i + \sum v_{e,ii} \vec{u}'_i$$

on dérive dans R ↙

$$\sum \ddot{x}_i \vec{u}_i = \sum \ddot{x}'_i \vec{u}'_i + \vec{0}$$

donc $\vec{a}(M/R) = \vec{a}(M/R')$

En appliquant le PFD au même système dans deux référentiels, $\sum \vec{F}_{ca,i}$ est identique à $\sum \vec{F}'_{ca,i}$.

3. Cas de deux référentiels en translation l'un par rapport à l'autre.

A. Situation et vocabulaire

Ici, on ne fait plus l'hypothèse de rectiligne uniforme pour la translation.

Néanmoins, on étudie toujours une translation, donc :

$$\begin{cases} \vec{v}_x' = \vec{v}_x \\ \vec{v}_y' = \vec{v}_y \\ \vec{v}_z' = \vec{v}_z \end{cases}$$

$\vec{v}(O' / R) = \vec{v}_c(t)$ peut varier en norme ou direction.

(cf. FIGURE 6)

A gauche : il y a translation de R' dans R .

A droite : non.

B. Composition des vitesses

(cf. FIGURE 5)

$$\vec{OH} = \vec{OO'} + \vec{O'H}$$

$$\begin{aligned} \sum \alpha_i \vec{v}_i' &= \vec{OO'} + \sum \alpha_i' \vec{v}_i'' \\ & (= \vec{OO'} + \sum \alpha_i' \vec{v}_i') \end{aligned}$$

$\frac{d}{dt} R'$

donc $\vec{v}(H/R) = \vec{v}(O'/R) + \vec{v}(H/R')$

→

Ainsi, $\vec{v}(H/R) = \vec{v}_c(t) + \vec{v}(H/R')$

C. Composition des accélérations

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_R \left\{ \begin{aligned} \sum \dot{x}_i \vec{u}_i &= \sum \dot{x}'_i \vec{u}'_i + \vec{v}(O'R) \\ \vec{a}(M/R) &= \vec{a}(M/R') + \vec{a}(O'R) \\ \vec{a}_e(M) &= \vec{a}(O'R) \end{aligned} \right.$$

→

$$\text{Ainsi, } \vec{a}(M/R) = \vec{a}(M/R') + \vec{a}_e$$

4. Cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe

(cf. FIGURE 7 et FIGURE 8)

$$O' = O \quad \text{et} \quad \vec{u}_z' = \vec{u}_z$$

A. Vecteur rotation

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{u}_x' &= \cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y \\ \vec{u}_y' &= -\sin(\theta) \vec{u}_x + \cos(\theta) \vec{u}_y \end{aligned} \right.$$

On pose ω la vitesse angulaire : $\omega = \dot{\theta}$

$$\left\{ \begin{aligned} \left. \frac{d\vec{u}_x'}{dt} \right|_R &= -\dot{\theta} \sin(\theta) \vec{u}_x + \dot{\theta} \cos(\theta) \vec{u}_y \\ \left. \frac{d\vec{u}_y'}{dt} \right|_R &= -\dot{\theta} \cos(\theta) \vec{u}_x - \dot{\theta} \sin(\theta) \vec{u}_y \end{aligned} \right.$$

Soit $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{u}_z$ (vecteur rotation).

$$\begin{array}{l} \vec{u}_z' \wedge \vec{u}_x' = \vec{u}_y' \\ \vec{u}_z' \wedge \vec{u}_y' = -\vec{u}_x' \end{array}$$

donc,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{u}_x'}{dt} \Big|_R = \vec{\omega} \vec{u}_z' \wedge \vec{u}_x' \\ \frac{d\vec{u}_y'}{dt} \Big|_R = \vec{\omega} \vec{u}_z' \wedge \vec{u}_y' \\ \frac{d\vec{u}_z'}{dt} \Big|_R = \vec{\omega} \vec{u}_z' \wedge \vec{u}_z' = \vec{0}' \end{array} \right.$$



Ainsi, $\frac{d\vec{u}_i'}{dt} \Big|_R = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_i'$

où $\vec{\omega}$ est le vecteur rotation

B. Composition des vitesses

$$\vec{v}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_R = \sum \dot{\alpha}_i \vec{u}_i'$$

$$\vec{v}(M/R') = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{R'} = \sum \dot{\alpha}_i' \vec{u}_i'$$

But : relier $\vec{v}(M/R)$ et $\vec{v}(M/R')$
 Pour cela, on projette \vec{OM} dans R' puis on dérive dans R .

$$\vec{OM} = \sum \alpha_i' \vec{u}_i'$$

$$\begin{aligned} \vec{v}(M/R) &= \sum_i \dot{\alpha}_i' \vec{u}_i' + \alpha_i' \frac{d\vec{u}_i'}{dt} \Big|_R \\ &= \sum_i \dot{\alpha}_i' \vec{u}_i' + \alpha_i' \vec{\omega} \wedge \vec{u}_i' \\ &= \vec{v}(M/R') + \vec{\omega} \wedge \sum \alpha_i' \vec{u}_i' \end{aligned}$$

→

$$\text{Ainsi, } \vec{v}(M/R) = \vec{v}(M/R') + \vec{v}_e$$

$$\text{avec } \vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}'$$

C. Composition des accélérations

A nouveau, on effectue $\left(\frac{d}{dt}\right)_R$

$$\vec{a}(M/R) = \sum_i \ddot{x}_i' \vec{u}_i' + \dot{x}_i' \vec{\omega} \wedge \vec{u}_i' + \dot{x}_i' \vec{\omega} \wedge \vec{u}_i' + \dot{x}_i' \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{u}_i')$$

$$= \vec{a}(M/R') + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \sum_i \dot{x}_i' \vec{u}_i'}_{\vec{v}(M/R')} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \sum_i \dot{x}_i' \vec{u}_i')}_{\vec{OM}'}$$

rotation uniforme

$$\hookrightarrow \dot{\omega} = 0$$

→

$$\text{Ainsi, } \vec{a}(M/R) = \vec{a}(M/R') + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

$$\text{où } \vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}')$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M/R')$$

accélération de Coriolis
complémentaire

D. Point coïncident

Si M est immobile dans R', $\vec{v}(M/R') = \vec{0}$ et $\vec{a}(M/R') = \vec{0}$

donc,

$$\begin{cases} \vec{v}(M/R) = \vec{v}_e \\ \vec{a}(M/R) = \vec{a}_e \end{cases}$$

Analogue à la translation, mais ici, \vec{v}_e et \vec{a}_e dépendent de la position de M dans R'.

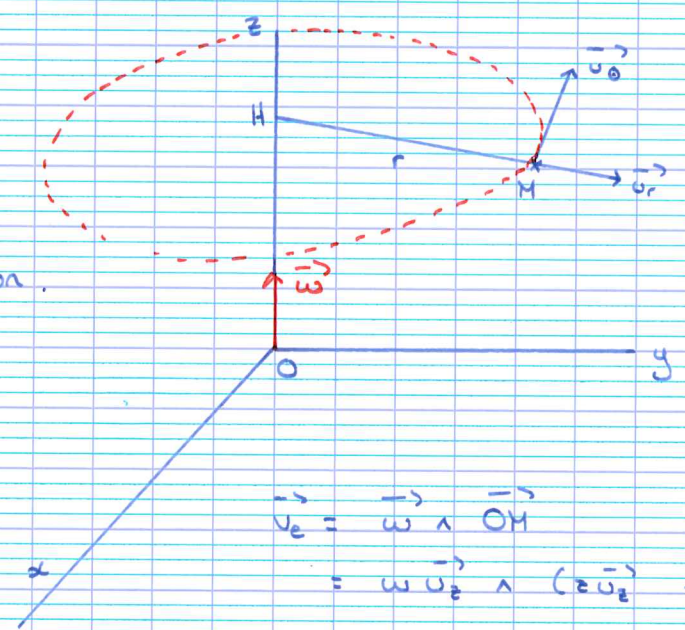
Si M se déplace dans \mathcal{R}' , \vec{v}_e et \vec{a}_e , qui ne dépendent que de $M(t_0)$, sont identiques à celles du point immobile dans \mathcal{R}' qui coïncide avec lui à t_0 .

coïncide: au même endroit au même moment

\vec{v}_e et \vec{a}_e sont la vitesse et l'accélération de ce point coïncidant dans \mathcal{R} .

E. Expressions simplifiées de \vec{v}_e et \vec{a}_e

H: projection de M sur l'axe de rotation.



$$\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

$$= \omega \vec{u}_z \wedge (z \vec{u}_z + r \vec{u}_r)$$

donc $\vec{v}_e = r\omega \vec{u}_\theta$ ←

$$\vec{a}_e = \omega \vec{u}_z \wedge r\omega \vec{u}_\theta$$

donc $\vec{a}_e = -r\omega^2 \vec{u}_r = -\omega^2 HM$ ←

5. Cas général

Si \mathcal{R}' a un mouvement quelconque, on aura toujours :

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e \\ \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c \end{cases}$$

A trouver par le point coïncident.

et toujours, $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$.

II. Dynamique dans un référentiel non galiléen

1. Problématique

* La seconde loi de Newton

Dans un tel référentiel, un point isolé est soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.

Tous les référentiels galiléens sont en TRU les uns par rapport aux autres.

* Parfois, il est naturel d'utiliser un référentiel non galiléen.

Exemple : mouvement d'une valise dans un bus qui freine

(cf. FIGURE 9)

Il paraît naturel d'utiliser le référentiel \mathcal{R}' du bus, mais lorsque le bus freine, \mathcal{R}' n'est plus galiléen.

2. Cas où \mathcal{R}' est en translation dans \mathcal{R} galiléen

(cf. FIGURE 10)

$$\vec{v}_e(M/\mathcal{R}) \quad \vec{a}_e = \vec{a}(O'/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{v}_e}{dt}$$

A. Force d'inertie d'entraînement sur un point matériel

Dans \mathcal{R} , la seconde loi de Newton dit :

$$m\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\text{donc } m(\vec{a}(M/\mathcal{R}') + \vec{a}_e) = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\text{donc } m\vec{a}(M/\mathcal{R}') = \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{a}_e$$

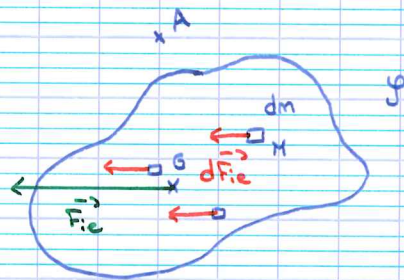
Pour étudier le mouvement d'un point matériel de masse m dans un référentiel \mathcal{R}' non galiléen en translation par rapport à \mathcal{R} , on ajoute à la résultante des forces une force d'entraînement \vec{F}_{ie} .

On introduit alors la force d'inertie d'entraînement :



$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$$

A'. Cas d'un système étendu, point d'application de \vec{F}_{ie}



\mathcal{S} est soumis à :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ie} &= \int_{\mathcal{S}} d\vec{F}_{ie} \\ &= \int_{\mathcal{S}} -dm\vec{a}_e \\ &= -\left(\int_{\mathcal{S}} dm\right)\vec{a}_e \end{aligned}$$

donc $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$

Comme le poids, cette force doit s'appliquer au centre de masse G .

Moment des forces d'inertie en A :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{A,e} &= \int_S \vec{AM} \wedge d\vec{F}_{i,e} \\ &= \int_S \vec{AM} \wedge (-dm\vec{a}_e) \quad (\vec{a}_e \text{ est uniforme}) \\ &= - \left(\int_S dm \vec{AM} \right) \wedge \vec{a}_e \end{aligned}$$

Par définition, $\vec{AG} = \frac{1}{m} \int_S dm \vec{AM}$.

$$\begin{aligned} \text{donc } \vec{M}_{A,e} &= -m\vec{AG} \wedge \vec{a}_e \\ &= \vec{AG} \wedge (-m\vec{a}_e) \\ &= \vec{AG} \wedge \vec{F}_{i,e} \end{aligned}$$

Comme si toute la force s'applique en G.

Conséquence : $\vec{M}_{G,e} = \vec{0}$.

Dans le TMC, $\vec{F}_{i,e}$ n'intervient pas si on choisit un axe passant par G.

⇒ Utile pour étudier le mouvement d'une roue.

3. Exemples et interprétation

Exemple : valise dans le bus. (cf. FIGURE 9)

Le bus freine dès $t=0$.

$$\vec{a}_e = \underbrace{a_e}_{<0} \vec{u}_x$$

Σ : Pa valise dans le bus
Référentiel : \mathcal{R}' (celui du bus).

Forces :

- * $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = -ma_e \vec{u}_x$
- * $\vec{N} = N\vec{u}_y$
- * $\vec{T} = T\vec{u}_x$ (avec T algébrique)
- * $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$

D'après le TMC :

$$m\vec{a}(M/\mathcal{R}') = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_{ie}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_x \\ \vec{u}_y \end{cases} \begin{cases} m\ddot{x} = T - ma_e \\ 0 = N - mg \end{cases} \quad (\text{donc } N = mg)$$

Pour éliminer T , on utilise les lois de Coulomb.

Lois de Coulomb :

* Si il y a déjà non glissement, cela perdure tant que $|T| \leq \mu_s |N|$.

* Si il y a glissement, $|T| = \mu_s |N|$
et \vec{T} est de sens opposé au glissement.

* Si Pa valise ne glisse pas, $\dot{x} = 0$ et $\ddot{x} = 0$.
(immobilité dans \mathcal{R}').

donc $T = ma_e < 0$

donc $|T| = m|a_e|$

C'est vraiment le cas à condition que $|T| \leq \mu_s |N|$.

i.e. à condition que $m|a_e| \leq \mu_s |mg|$

i.e. à condition que $|a_e| \leq \mu_s g$

A.N. $\mu_s = 0,1$

$$|a_e| = 0,1 \times 9,81$$

$$= 0,98 \text{ m.s}^{-2}$$

* Sinon, Pa valise glisse :

D'après les Lois de Coulomb :

$$|T| = \mu_d mg$$

⊙ évidence, Pa valise glisse vers Pa droite, donc $T < 0$

donc $T = -\mu_d mg$

donc $m\ddot{x} = -\mu_d mg - ma_e$

donc $\ddot{x} = -\left(a_e + \underbrace{\mu_d g}_{\mu_s g}\right) > 0$

$a_e < -\mu_s g$

$\mu_d \neq \mu_s$

On obtient, si \vec{a}_e ne dépend pas du temps :

$$\dot{x} = -\left(a_e + \mu_d g\right)t + 0$$

Ainsi, $x = -\frac{1}{2}\left(a_e + \mu_d g\right)t^2 + x_0$

Dans cet exemple, on comprend l'utilisation du terme "inertie d'entraînement". Dans 2, Pa valise lourde (massive) a tendance à continuer vers P' avant, ce qui dans 2' donne l'illusion d'une force vers P' avant.

Exemple : Dispositifs d'apesanteur (cabine en chute libre).

(cf. FIGURE 11)

$$\vec{a}(O'/R) = \vec{a}_e = \vec{g}$$

dans R' , \vec{F}_{ie} intervient,

$$\text{et } \vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = -m\vec{g}$$

objet d'un objet dans la cabine.

$$\begin{aligned} \text{Loi de Newton dans } R' : \vec{F}_{ie} + \vec{P} &= -m\vec{g}' + m\vec{g} \\ &= \vec{0}' \end{aligned}$$

\Rightarrow Permet des expériences brèves.

$t \approx 2s$ pour une tour de 20 m.

Exemple : Dispositifs d'apesanteur (vol parabolique).

(cf. FIGURE 12).

L'avion assure $\vec{a}(O'/R) = \vec{g}$ (trajectoire parabolique).

R' orientation fixe. (car R' doit être en translation par rapport à R).

$$\vec{F}_{ie} + m\vec{g} = \vec{0}'$$

3. Cas où R' est en rotation uniforme dans R

A. Forces d'inertie

(cf. FIGURE 8)

$$\text{Dans } R \text{ galiléen, PFD : } m\vec{a}(M/R) = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$m(\vec{a}(M/R') + \vec{a}_e + \vec{a}_c) = \sum \vec{F}_{ext}$$

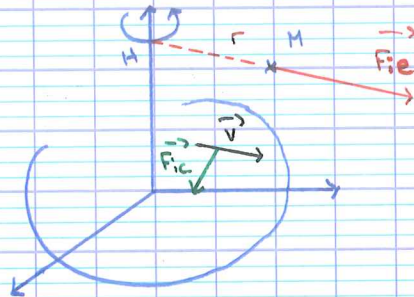
$$m\vec{a}(M/R') = \sum \vec{F}_{ext} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$$

Pour étudier le mouvement d'un point matériel M de masse m dans un référentiel R' en rotation uniforme par rapport à R galiléen, en ajoute, aux forces s'appliquant dans R , la force d'inertie d'entraînement et la force d'inertie de Coriolis définies respectivement par

(\rightarrow)

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e(CH) \quad \text{et} \quad \vec{f}'_{ie} = -m\vec{a}'_e(CH) = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'(CH)$$

Remarque : $\left. \begin{aligned} \vec{a}_e &= -\omega^2 \vec{u}_r \\ &= -\omega^2 \vec{HM} \end{aligned} \right\} \text{ donc } \vec{f}_{ie} = m\omega^2 \vec{HM}$



Cette force est centrifuge.

Remarque : $\nabla(\vec{f}_{ie}) = -2m(\vec{\omega} \wedge \vec{v}') \cdot \vec{v}' = 0$

Cette force ne travaille pas, elle dévie les trajectoires, un peu comme une force magnétique.

Résumé :

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e(CH) = -m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OH})$$

$$\vec{f}'_{ie} = -m\vec{a}'_e = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'(M/R')$$

3. Exemples

Mouvement d'un anneau : (cf. FIGURE 13)

On se place dans \mathcal{R}' : $M(x', y=0, z=0)$.

On suppose qu'il n'y a pas de frottements.

Forces :

$$* \vec{P} = -mg\vec{u}_z$$

$$* \vec{F}_{ie} = m\omega^2 \vec{OM} = m\omega^2 x' \vec{u}_{x'}$$

$$* \vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$
$$= -2m\omega \vec{u}_z \wedge x' \vec{u}_{x'}$$
$$= -2m\omega x' \vec{u}_y$$

$$* \vec{R} = R_y \vec{u}_y + R_z \vec{u}_z$$

(pas de composante en x'
car ϕ frottements, donc réaction
orthogonale à $\vec{u}_{x'}$).

PFD :

$$\begin{cases} \vec{u}_{x'} \\ \vec{u}_y \\ \vec{u}_z \end{cases} \begin{cases} m\ddot{x}' = m\omega^2 x' \\ 0 = -2m\omega x' + R_y \\ 0 = -mg + R_z \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \ddot{x}' - \omega^2 x' = 0 \\ R_y = 2m\omega x' \\ R_z = mg \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } x' = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}$$

$$\begin{cases} \text{à } t=0 : x' = x_0 \text{ et } \dot{x}' = 0 \\ A + B = x_0 \\ \omega A - \omega B = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} A = x_{0,2} \\ B = x_{0,2} \end{cases}$$

Ainsi, $x' = x_0 \operatorname{ch}(\omega t)$

donc $R_y' = 2m\omega x'$
 $= 2m\omega^2 x_0 \operatorname{sh}(\omega t)$

Arrivée au bout de tige P en t_2 .

$$x'(t_2) = P$$

donc $x_0 \operatorname{ch}(\omega t_2) = P$

donc $\operatorname{ch}(\omega t_2) = \frac{P}{x_0}$

donc $\omega t_2 = \operatorname{argch}\left(\frac{P}{x_0}\right)$

donc $t_2 = \frac{1}{\omega} \operatorname{argch}\left(\frac{P}{x_0}\right)$

Vitesse à P arrivée :

$$\begin{aligned} \dot{x}'(t_2) &= \omega x_0 \operatorname{sh}(\omega t_2) \\ &= \omega x_0 \sqrt{\operatorname{ch}^2(\omega t_2) - 1} \\ &= \omega x_0 \sqrt{\left(\frac{P}{x_0}\right)^2 - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 &= 1 \\ \operatorname{sh} &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 - 1} \end{aligned}$$

donc $\dot{x}'(t_2) = \omega \sqrt{P^2 - x_0^2}$

Dans $\mathcal{R}_T(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \vec{v}'(t_2) &= \vec{v}'(t_2) + \vec{v}_e \\ &= \omega \sqrt{P^2 - x_0^2} u_{x'} + P\omega u_{y'} \end{aligned}$$

Remarque : \vec{F}_{ie} dérive d'une énergie potentielle.

$$\vec{F}_{ie} = -\vec{\text{grad}} E_{pe}$$

$$\delta W_{ie} = -dE_{pe}$$

On raisonne dans R' :

$$\begin{aligned}\delta W_{ie} &= \vec{F}_{ie} \cdot d\vec{OM} \\ &= m\omega^2 \alpha' \vec{u}_{\alpha'} \cdot d\vec{OM} \\ &= m\omega^2 \alpha' d\alpha'\end{aligned}$$

$$\text{donc } \delta W_{ie} = m\omega^2 d\left(\frac{\alpha'^2}{2}\right)$$

$$\text{donc } E_{pe} = -m\omega^2 \frac{\alpha'^2}{2}$$

Ici, 3 forces ne travaillent pas (poids, f^o sans frottements, force de Coriolis) et une dérive d'une E_p (\vec{F}_{ie}).

Dès lors, le système est conservatif.

$$\text{i.e. } E_m = E_c + E_p \text{ se conserve.}$$

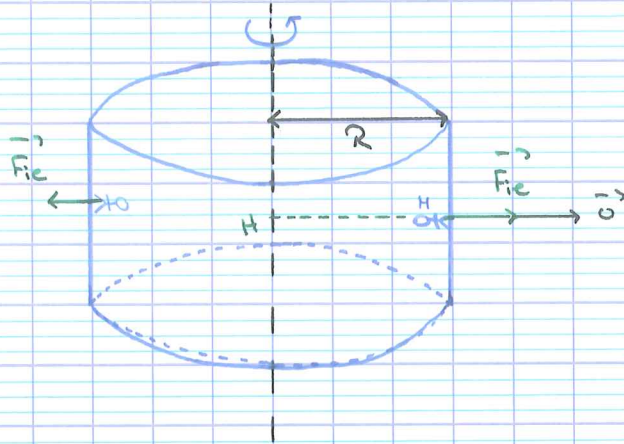
$$\text{i.e. } E_m(t_2) = E_m(0)$$

$$\text{donc } \frac{1}{2} m \dot{\alpha}'^2 - m\omega^2 \frac{\alpha'^2}{2} = -m\omega^2 \frac{\alpha_0'^2}{2}$$

$$\text{donc } \alpha'^2(t_2) - \omega^2 \rho^2 = -\omega^2 \alpha_0'^2$$

$$\text{Ainsi, } \alpha'(t_2) = \omega \sqrt{\rho^2 - \alpha_0'^2}$$

Gravité artificielle :



$$\begin{aligned}\vec{F}_{ie} &= m\omega^2 \vec{HM} \\ &= m\omega^2 R \vec{u} \\ &= m\vec{g}_{\text{fict}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R &\gg 0 \\ \text{donc } HM &\approx R\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{g}_{\text{fict}} &= R\omega^2 \vec{u} \\ \text{avec } R\omega^2 &= 9,81 \text{ m.s}^{-2}\end{aligned}$$

Remarque : Comme la force est proportionnelle à HM , la force d'inertie d'entraînement n'est pas la même partout (de la tête à ses pieds). Cette force ne s'applique pas exactement au centre de masse.

elle n'est pas uniforme.

Attention aux possibles effets de marée.

