

CHAPITRE 10 : REFERENTIEL TERRESTRE

Les trois référentiels de bases : (cf. FIGURE 1)

- * Référentiel héliocentrique :
 - origine : centre de masse du système solaire
 - axes : 3 étoiles polaires galiléen
- * Référentiel géocentrique :
 - origine : centre de la Terre
 - en translation par rapport à $R_{\text{hélio}}$
- * Référentiel terrestre :
 - tourne par rapport à l'axe des pôles
 - rotation uniforme de vitesse angulaire ω et de période $T_{\text{sid}} = \frac{2\pi}{\omega}$ (jour sidéral)

T_{sid} n'est pas $T_{\text{sol}} = 24 \text{ h}$ (jour solaire)

La Terre décrit son orbite. $T_{\text{an}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{an}}}$

On a, pour $t = T_{\text{sol}}$:

$$\omega T_{\text{sol}} = 2\pi + \omega_{\text{an}} T_{\text{sol}}$$

$$\text{donc } \omega = \frac{2\pi}{T_{\text{sol}}} + \omega_{\text{an}}$$

$$\text{donc } T_{\text{sid}} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_{\text{sol}}} + \omega_{\text{an}}} = \frac{T_{\text{sol}}}{1 + \frac{\omega_{\text{an}} T_{\text{sol}}}{2\pi}}$$

$$\text{Ainsi, } T_{\text{sid}} = \frac{T_{\text{sol}}}{1 + \frac{T_{\text{sol}}}{T_{\text{an}}}} = \frac{24 \text{ h}}{1 + \frac{1}{365,25}} = 23 \text{ h } 56 \text{ min}$$

$$\text{A.N. } \omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$

I. Effets de la force d'inertie d'entraînement

$\mathcal{R}_{géo}$ n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_{Hélio}$.

Donc, $\mathcal{R}_{géo}$ n'est pas galiléen.

On le suppose quand même! (On le prend en compte dans III.)

\mathcal{R}_{Terre} est en rotation par rapport à $\mathcal{R}_{géo}$,
il n'est pas galiléen.

1. Gravité et pesanteur

(cf. FIGURE 2)

Système : point matériel H

Référentiel : terrestre

Soumis à :

* attraction gravitationnelle :

$$\vec{F}_0 = m\vec{g}_0$$

$$\vec{g}_0 = -g_0 \vec{u}_r$$

$$g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2} \quad \text{champ de gravité}$$

* $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \vec{r}_{HH}$

$$= m\omega^2 R_T \cos(\lambda) \vec{u}_p$$

On appelle poids de l'objet (force de pesanteur) :

$$\vec{P} = \vec{F}_0 + \vec{F}_{ie}$$

$$= m\vec{g}_0 + m\omega^2 R_T \cos(\lambda) \vec{u}_p$$

$$= m \left(\vec{g}_0 + \omega^2 R_T \cos(\lambda) \vec{u}_p \right)$$

$$\text{Ainsi, } \vec{P} = m\vec{g}$$

$$\text{ou } \vec{g} = \vec{g}_0 + \vec{g}_{ie} \quad \text{et } \vec{g}_{ie} = R_T \omega^2 \cos(\lambda) \vec{u}_p$$

$$g_0 = 9,809 \text{ m.s}^{-2}$$

$$g_{ie} = 0,0339 \text{ m.s}^{-2}$$

$$q = \frac{R_T \omega^2}{g_0} = 3,46 \cdot 10^{-3} \approx \frac{1}{290}$$

L'influence de g_{ie} est petite mais il faut la prendre en compte.

2. Variation de g avec la latitude

* Aux pôles : $\lambda = \pm \pi/2$

$$\vec{g} = -g_0 \vec{u}_r$$

$$g = \|\vec{g}\| = g_0$$

* A l'équateur : $\lambda = 0$

$$\vec{g} = -g_0 \vec{u}_r + R_T \omega^2 \vec{u}_r$$

$$= -(g_0 - R_T \omega^2) \vec{u}_r$$

$$\text{donc } g = g_0 - R_T \omega^2 = 9,775 \text{ m.s}^{-2}$$

* λ quelconque :

$$\vec{g} = -g_0 \vec{u}_r + R_T \omega^2 \cos(\lambda) \vec{u}_p$$

$$g^2 = \vec{g} \cdot \vec{g}$$

$$= g_0^2 + (R_T \omega^2)^2 \cos^2(\lambda) - 2g_0 R_T \omega^2 \cos(\lambda) \underbrace{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_p}_{\cos(\lambda)}$$

$$\text{donc } g^2 = g_0^2 \left[1 + q^2 \cos^2(\lambda) - 2q \cos^2(\lambda) \right]$$

$$\text{Ainsi, } g = g_0 \sqrt{1 - 2q \cos^2(\lambda) + q^2 \cos^2(\lambda)}$$

$$\approx g_0 (1 - q \cos^2(\lambda))$$

La décroissance de g s'observe expérimentalement mais avec une valeur $g' = 5,3 \cdot 10^{-3}$.

En réalité, la Terre est déformée par les forces d'inertie d'entraînement : c'est un ellipsoïde.

3. Le seau de Newton

(cf. FIGURE)

A l'équilibre, dans \mathcal{R}' tournant :

$$\vec{\nabla} \mathcal{P} = \vec{f} = \rho \vec{g} - \rho \vec{a}_e$$

$$\text{ou } \vec{a}_e = -r\omega^2 \vec{u}_r$$

Equilibre : $v' = 0$

donc $\vec{F}_{ic} = \vec{0}$.

$$\begin{cases} \vec{u}_r & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r} = \rho \omega^2 r \quad (1) \\ \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} = -\rho g \quad (2) \end{array} \right. \quad \text{avec } \mathcal{P} = \mathcal{P}(r, z) \end{cases}$$

D'après (1) : $\mathcal{P} = \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} + K(z)$

donc $\frac{d\mathcal{P}}{dz} = K'(z)$

D'après (2) : $K(z) = -\rho g z + \text{cste}$

Ainsi, $\mathcal{P} = \rho \omega^2 \frac{r^2}{2} - \rho g z + \text{cste}$

CI : $\mathcal{P}(r=0, z=h_0) = \mathcal{P}_0$ donc $\text{cste} = \mathcal{P}_0 + \rho g h_0$

La surface libre est l'ensemble des points tels que $\mathcal{P}(r, z) = \mathcal{P}_0$.

$$\rho \omega^2 \frac{r^2}{2} - \rho g z + \mathcal{P}_0 + \rho g h_0 = \mathcal{P}_0$$

Ainsi, $z = h_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$.

La surface est un paraboloid.

(de l'eau à la surface).

on utilise la continuité de \mathcal{P}

(sauf quand il y a une tension superficielle mais HP).

→ on ne le voit jamais. (ce pas naturel).

4. Bourrelet équatorial de la Terre

(cf. FIGURE 4)

La Terre est vue comme un fluide à l'équilibre dans le référentiel terrestre non galiléen.

à l'intérieur de la Terre
↓

$$\vec{\nabla}P = \rho \vec{g}_{\text{grav}} - \rho \vec{a}_e$$

où $\vec{a}_e = -\omega^2 \vec{u}_r = -r \omega^2 \frac{\vec{u}_r}{r} = -r \omega^2 \frac{g_0}{R_T}$ et $\vec{g}_{\text{grav}} = -g_0 \frac{\vec{OH}}{R_T}$ (admis)

$$= -\frac{g_0}{R_T} (z \vec{u}_z + r \vec{u}_r)$$

donc $\vec{\nabla}P = -\rho \frac{g_0}{R_T} (z \vec{u}_z + r \vec{u}_r) + \rho g_0 \frac{g_0}{R_T} r \vec{u}_r$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_r : \frac{\delta P}{\delta r} = \rho \frac{g_0}{R_T} (qr - r) \quad (1) \\ \vec{u}_z : \frac{\delta P}{\delta z} = -\rho \frac{g_0}{R_T} z \quad (2) \end{array} \right.$$

D'après (1) : $P = \rho \frac{g_0}{R_T} (q-1) \frac{r^2}{2} + K(z)$

D'après (2) : $K'(z) = -\rho \frac{g_0}{R_T} z$

donc $K = -\rho \frac{g_0}{R_T} \frac{z^2}{2} + \text{cte}$

Ainsi, $P = \rho \frac{g_0}{R_T} (q-1) \frac{r^2}{2} - \rho \frac{g_0}{R_T} \frac{z^2}{2} + \text{cte}$

En un point quelconque à la surface, $P = P_0$.

donc $\alpha r^2 + \beta z^2 = 1$

La surface est un ellipsoïde.

Aux pôles : $r = 0, z = \pm R_p$
 $-\rho \frac{g_0}{R_T} \frac{R_p^2}{2} + \text{cte} = P_0$

A l'équateur : $z = 0$, $r = R_e$

$$\rho \frac{g_0}{R_T} (q-1) \frac{R_e^2}{2} + \text{cste} = P_0$$

$$\text{donc} \quad -\rho \frac{g_0}{R_T} \frac{R_p^2}{2} = \rho \frac{g_0}{R_T} (q-1) \frac{R_e^2}{2}$$

$$\text{donc} \quad R_p^2 = (1-q) R_e^2$$

$$R_p = \sqrt{1-q} R_e$$

$$\approx \left(1 - \frac{q}{2}\right) R_e \quad (\text{car } q \ll 1)$$

$$\text{Ainsi} \quad \underline{R_p - R_e} = -\frac{q R_e}{2} \quad \text{A.N. } R_e = R_T = 6370 \text{ km.}$$

$$R_p < R_e \quad \text{A.N. } R_p - R_e = -11 \text{ km.}$$

$$\text{En réalité, } R_p - R_e = -22 \text{ km.}$$

Erreur du modèle : on a utilisé de champ de gravité à un astre sphérique.

→ suite en exercice.

II. Effets de la force de Coriolis

$$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v} \quad (\omega / R_{\text{Terre}})$$

1. Ordres de grandeur et direction / orientation

(cf. FIGURE 6)

$$\|\vec{F}_{ic}\| \leq 2m\omega v$$

$$v = 10 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\omega v = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$$

$$\text{OdG : } \|\vec{F}_{ic}\| \leq 10^{-4} ?$$

Elle se manifeste dans les écoulements géophysiques ou dans des mouvements à grande portée.

Pour un mouvement horizontal :

$$\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y$$

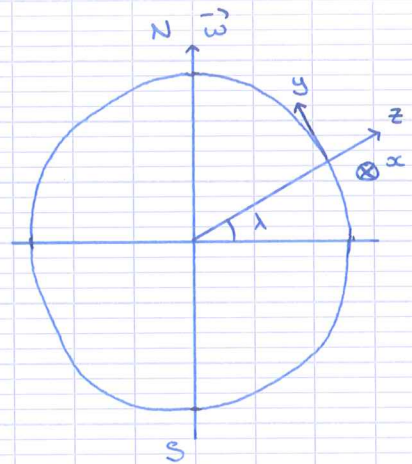
$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \cos(\lambda) \\ \omega \sin(\lambda) \end{pmatrix}$$

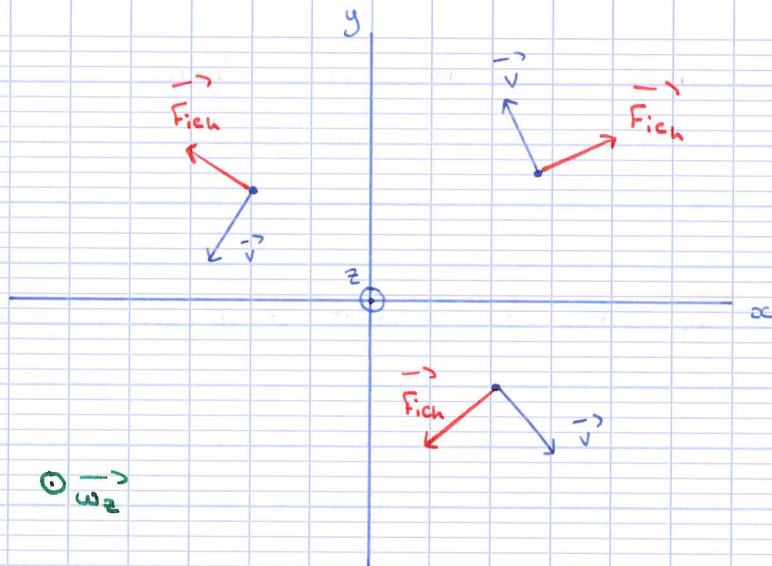
$$\vec{F}_{ic} = -2m \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \cos(\lambda) \\ \omega \sin(\lambda) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \vec{F}_{ic} = -2m \begin{pmatrix} -\omega v_y \sin(\lambda) \\ \omega v_x \sin(\lambda) \\ -\omega v_x \cos(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{ic \text{ horizontal}} = -2m \begin{pmatrix} -\omega v_y \sin(\lambda) \vec{u}_x \\ \omega v_x \sin(\lambda) \vec{u}_y \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \vec{F}_{ic h} = -2m \omega_z \vec{u}_z \wedge \vec{v}$$





Dans l'hémisphère nord, la force de Coriolis dévie les mouvements horizontaux vers leur droite.

2. Tir polaire

(cf. FIGURE 7)

\vec{u}_x vers Greenwich

On tire un boulet à $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ mesurée dans R_T .

On étudie seulement le début.

donc $\vec{v} \approx \vec{v}_0$

$$\begin{aligned} \vec{F}_c &= -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v} \\ &= -2m\omega \vec{u}_z \wedge v_0 \vec{u}_x \\ &= -2m\omega v_0 \vec{u}_y \end{aligned}$$

2FD :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - 2m\omega v_0 \vec{u}_y$$

On projette dans (Oxy) :

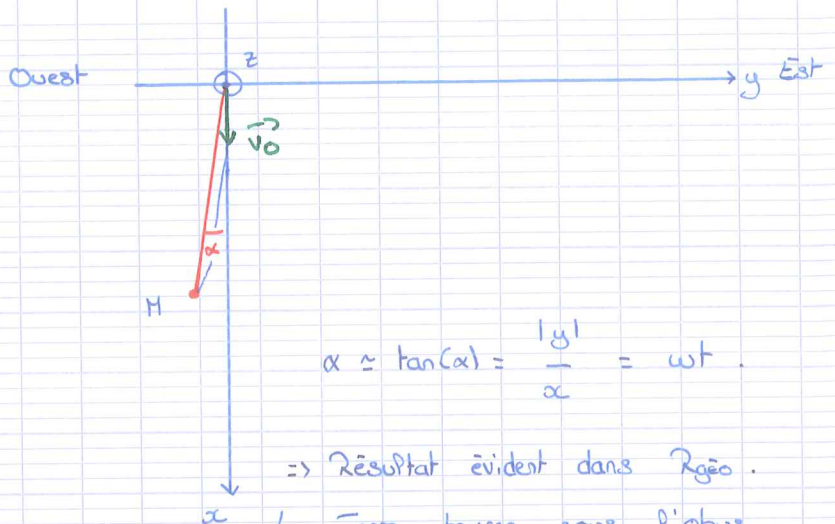
$$\begin{cases} \text{lx} & \left\{ \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= 0 \\ \text{ly} & \left\{ \begin{aligned} \frac{dv_y}{dt} &= -2\omega v_0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{cases}$$

donc, en intégrant :

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = -2\omega v_0 t \end{cases}$$

donc, en intégrant :

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = -\omega v_0 t^2 \end{cases}$$



$$\alpha \approx \tan(\alpha) = \frac{|y|}{x} = \omega t$$

=> Résultat évident dans $R_{géo}$.
La Terre tourne sous l'obus qui vole en ligne droite.

3. Déviation d'une chute libre

(cf. FIGURE 8)

Départ $z = h$, $\vec{v} = \vec{0}$ dans R_T

Forces :

* $m\vec{g}$

* $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \cos(\lambda) \\ \omega \sin(\lambda) \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \text{a priori inconnue}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \vec{F}_{ic} &= -2m \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \cos(\lambda) \\ \omega \sin(\lambda) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ &= -2m \begin{pmatrix} \omega \cos(\lambda) v_z - \omega v_y \sin(\lambda) \\ \omega v_x \sin(\lambda) \\ -\omega v_x \cos(\lambda) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{PFD : } m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -2\omega \cos(\lambda) v_z + 2\omega \sin(\lambda) v_y & (1) \\ \frac{dv_y}{dt} = -2\omega \sin(\lambda) v_x & (2) \\ \frac{dv_z}{dt} = 2\omega v_x \cos(\lambda) - g & (3) \end{cases}$$

$$\int (2) : v_y = -2\omega \sin(\lambda) x + c_2 t$$

$$\int (3) : v_z = 2\omega \cos(\lambda) x - gt + c_3 t \quad (3')$$

$$- (1) : \frac{dx^2}{dt^2} = -2\omega \cos(\lambda) [2\omega \cos(\lambda) x - gt] + 2\omega \sin(\lambda) [-2\omega \sin(\lambda) x]$$

$$\text{donc } \ddot{x} + 4\omega^2 x = 2\omega \cos(\lambda) gt$$

$$\text{donc } x = A \cos(2\omega t) + B \sin(2\omega t) + \frac{1}{2\omega} \cos(\lambda) gt$$

$$\text{Conditions initiales : } x(0) = 0 \quad \text{donc } A = 0$$

$$\dot{x}(0) = 0 \quad \text{donc } 2\omega B + \frac{g \cos(\lambda)}{2\omega} = 0$$

$$\text{donc } B = \frac{-g \cos(\lambda)}{4\omega^2}$$

$$\text{donc } x(t) = \frac{g \cos(\lambda)}{4\omega^2} \underbrace{\left(2\omega t - \sin(2\omega t) \right)}_{> 0}$$

L'objet tombe vers l'est.

Grâce à (3'), on obtient :

$$z(t) = h - \frac{gt^2}{2} + \frac{g \cos^2(\lambda)}{\omega} \left[\frac{\omega t^2}{2} + \frac{1}{4\omega} \underbrace{(\cos(2\omega t) - 1)}_{\approx \frac{-(2\omega t)^2}{2}} \right]$$

$$\omega t \ll 1 \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= o(\omega^2 t^2)}$$

$$\text{donc } z(t) \approx h - \frac{gt^2}{2}$$

$$z(t_1) = 0 \quad \rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\alpha(t_1) \approx \frac{g \cos(\lambda)}{4\omega^2} \times \frac{(2\omega t_1)^3}{6}$$

$$\text{donc } \alpha(t_1) = \frac{g \cos(\lambda) \omega}{3} \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2} > 0$$

Pour $h = 100 \text{ m}$, on trouve $\alpha(t_1) \approx 1,6 \text{ cm}$ (\rightarrow petit).

Un calcul perturbatif donne le même résultat bien plus vite:

* si $\omega \rightarrow 0$ (\vec{F}_{ic} négligée) (ordre 0)

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = -g \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \\ v_z = -gt \end{cases} \quad \rightarrow \quad z = h - g \frac{t^2}{2}$$

* à l'ordre 1:

$$\frac{dv_x}{dt} = -2\omega \cos(\lambda) (-gt)$$

$$\text{donc } v_x = \omega \cos(\lambda) g t^2$$

$$\text{donc } \alpha = \omega \cos(\lambda) g \frac{t^3}{3}$$

$$\text{donc } \alpha(t_1) = \frac{\omega \cos(\lambda)}{3} \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2}$$

$$z(t_1) = 0$$

$$\text{donc } t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Pour évaluer l'effet de la force de Coriolis, on a utilisé la vitesse qu'on aurait sans force de Coriolis.

La déviation vers l'est se retrouve en montrant le produit vectoriel avec les doigts et \vec{v} vertical descendant.

III. Les marées

1. Phénoméologie

La marée est la variation du niveau de la mer due à l'attraction de la Lune et du Soleil.

En France, les marées ont un rythme semi-diurne avec une pseudopériode de $\bar{T} = 12 \text{ h } 25 \text{ min}$. (cf. FIGURE 1.1)

Il existe aussi des rythmes mensuels et saisonniers dus aux mouvements de la Lune et du Soleil.

2. Différentiel gravitationnel

Système : point matériel M de masse m (eau)

Référentiel : héliocentrique galiléen

Soumis à :

* $\vec{F}'(M)$: les forces d'origine terrestre (le poids et les forces de contact)

* Attraction gravitationnelle des astres autres que la Terre :

$$\vec{F}_g(M) = m \vec{g}(M)$$

$$\vec{g}(M) = \vec{g}_L(M) + \vec{g}_S(M) + \cancel{\vec{g}_{\text{autres}}(M)}$$

négligé

PE) : $m \vec{a}(M) = \vec{F}'(M) + m \vec{g}(M)$

donc
$$\vec{a}(M) = \frac{\vec{F}'(M)}{m} + \vec{g}(M)$$

\vec{g} dépend de M en norme et en direction.
Les différents points ne subissent pas la même accélération et donc les océans se déforment.

Pour la Terre entière :

Système : centre de la Terre T de masse m .

Référentiel : héliocentrique galiléen

Soumis aux forces gravitationnelles.

$$\text{PFD} : m \vec{a}(T) = m \vec{g}(T)$$

$$\text{donc } \vec{a}(T) = \vec{g}(T)$$

$\vec{a}(T) \neq \vec{a}(H)$, ce qui explique encore la déformation des océans.

3. Champ de marée

Il est naturel de raisonner dans le référentiel terrestre.

En réalité, on raisonne dans le référentiel géocentrique.

↳ on néglige donc l'effet de la force de Coriolis et les variations de g .

Système : point matériel M de masse m .

Référentiel : géocentrique non galiléen.

Soumis à :

$$\begin{aligned} * F_{ie} &= -m \vec{a}_e \\ &= -m \vec{a}(T) \rightarrow \text{accélération du centre de la Terre} \\ &\quad \text{dans le référentiel héliocentrique} \end{aligned}$$

$$* \text{Attraction gravitationnelle} : m \vec{g}(H)$$

On appelle force de marée :

$$\begin{aligned} \vec{F}_m(H) &= \vec{F}_{ie} + m \vec{g}(H) \\ &= m \vec{g}(H) - m \vec{a}(T) \\ &= m \vec{g}(H) - m \vec{g}(T) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \vec{F}_m(CH) = m(\vec{g}(CH) - \vec{g}(CT))$$

$$\vec{C}_m(CH) = \vec{g}(CH) - \vec{g}(CT)$$

champ de marée

On voit bien l'effet différentiel.

4. Expression de $\vec{C}_m(CH)$

(cf. FIGURE 12)

$$\text{On a : } \vec{g} = \vec{g}_L + \vec{g}_S$$

$$\text{donc } \vec{C}_m(CH) = \vec{C}_{m_L}(CH) + \vec{C}_{m_S}(CH)$$

$$\vec{C}_{m_A}(CH) = \vec{g}_A(CH) - \vec{g}_A(CT)$$

|
Lous

A: ASTRE

Dans la suite, on prend un seul astre à la fois.

Le calcul est pénible.

$$\vec{g}_A(CT) = \frac{G m_A}{D^2} \vec{u}_z$$

$$\vec{g}_A(CH) = \frac{G m_A}{AM^2} \vec{u}_{HA} = \frac{G m_A}{AM^3} \vec{MA}$$

$$\begin{aligned} \text{or } \vec{MA} &= \vec{MT} + \vec{TA} \\ &= -r \vec{u}_r + D \vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MA^2 &= \vec{MA} \cdot \vec{MA} \\ &= r^2 + D^2 - 2rD \vec{u}_r \cdot \vec{u}_z \\ &= r^2 + D^2 - 2rD \cos(\theta) \end{aligned}$$

$$\vec{u}_z = \cos(\theta) \vec{u}_r - \sin(\theta) \vec{u}_\theta$$

On peut continuer le calcul puis simplifier le résultat en faisant des DL en utilisant $\frac{r}{D} \ll 1$.

On obtient :

$$\vec{C}_m = C_r \vec{u}_r + C_\theta \vec{u}_\theta$$

$$C_r = C_0 (3 \cos^2(\theta) - 1)$$

$$C_\theta = -\frac{3}{2} C_0 \sin(2\theta)$$

$$\text{ou } C_0 = \frac{G_M r}{D^3}$$

↑
 $\frac{1}{D^3}$ montre l'effet différentiel
 sur $\frac{1}{D^2}$

On remarque (cf. TABLE 1) que :

$$C_0 \approx 10^{-7} \text{ g}$$

$$\text{et } C_{\text{Lune}} \approx 2 C_{\text{Soleil}}$$

On fait maintenant le calcul dans un cas simple ($\theta = 0$).

$$\begin{aligned} \vec{y}_A(\text{CH}) &= \frac{G_M}{(\omega - r)^2} \vec{u}_z \\ &= \frac{G_M}{\omega^2 \left(1 - \frac{r}{\omega}\right)^2} \vec{u}_z \\ &\approx \frac{G_M}{\omega^2} \left(1 + \frac{2r}{\omega}\right) \vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\text{donc } \vec{C}_{M_A}(\text{CH}) = \frac{G_M}{\omega^2} \left(1 + \frac{2r}{\omega}\right) \vec{u}_z - \frac{G_M}{\omega^2} \vec{u}_z$$

$$\text{donc } \vec{C}_{M_A}(\text{CH}) = \frac{2 G_M r}{\omega^3} \vec{u}_z \quad (\text{on retrouve } C_r(\theta = 0))$$

$$\text{Pour } \theta = \pi : \quad \vec{C}_{M_A}(\text{CH}) = -\frac{2 G_M r}{\omega^3} \vec{u}_z$$

5. Représentation de \vec{C} et rythme semi-diurne (cf. FIGURE 13)

Les forces provoquent une déformation ellipsoïdale, pointant vers l'astre attracteur.

(cf. FIGURE 14)

Quand la Lune fait un tour de la Terre, on voit deux marées hautes et deux marées basses.

Dans le référentiel terrestre, la Lune tourne à une vitesse angulaire $\omega_{L_T} = \omega - \omega_{L_{géo}}$ où $T_{L_{géo}} = 28 \text{ j}$

$$\text{A.N. } T_{L_T} = \frac{2\pi}{\omega_{L_T}} = 24 \text{ h } 50 \text{ min}$$

↓
temps que la Lune met pour faire un tour autour de la Terre.

↓
temps entre deux instants lors desquels la Lune revient au même point (après avoir fait un tour) dans le référentiel terrestre.

6. Potentiel de marée

$$\vec{g}(M) = -\text{grad } U \quad \text{où } U = \frac{Gm}{r}$$

|
potentiel de gravité

champ de gravité

$$m \vec{g}(M) = -\text{grad } \mathcal{E}_p$$

$$\text{or } \vec{C}_{m_A}(M) = \vec{g}_A(M) - \vec{g}_A(T)$$

$$\text{On a : } U_A(M) = -\frac{Gm_A}{AM}$$

$$\vec{g}(T) = \vec{g}(T) \vec{Oz} = -\text{grad} (-\vec{g}(T)z)$$

Ainsi, $\vec{C}_m = -\vec{\text{grad}} U_m$

$$\begin{aligned}
 \text{ou } U_m &= \gamma_{CT} z - \frac{G M_A}{AM} \\
 &= \frac{G M_A r \cos(\theta)}{D^2} - \frac{G M_A}{(r^2 + D^2 - 2rD \cos(\theta))^{1/2}} \\
 &= \frac{G M_A r \cos(\theta)}{D^2} - \frac{G M_A}{D \left(1 - \frac{2r \cos(\theta)}{D} + \frac{r^2}{D^2} \right)^{1/2}} \\
 &= \frac{G M_A r \cos(\theta)}{D^2} - \frac{G M_A}{D} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2r \cos(\theta)}{D} - \frac{r^2}{D^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{2r \cos(\theta)}{D} - \frac{r^2}{D^2} \right)^2 + o(u^3) \right) \\
 &= \frac{G M_A r \cos(\theta)}{D^2} (1-1) - \frac{G M_A}{D} \left(1 - \frac{r^2}{2D^2} + \frac{3}{8} \frac{4r^2 \cos^2(\theta)}{D^2} - \frac{r^4}{2D^4} - \frac{3}{4} \frac{2r \cos(\theta) r^2}{D^3} \right) \\
 &= \\
 &= \\
 &= \frac{G M_A r^2}{2D^3} (1 - 3 \cos^2(\theta)) + \text{cte}
 \end{aligned}$$

On peut le calculer avec $\vec{F}_m = -m \vec{\nabla} U$

7. Marée hydrostatique

(cf. FIGURE 13)

On suppose les océans à l'équilibre sous l'effet des forces de marée et de leur poids.

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} p &= \underbrace{\vec{f}_m}_{\text{marée}} + \rho \vec{g} \\
 &\quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\
 \vec{e}_r = 0 &\quad \quad \vec{e}_z = g \vec{z}
 \end{aligned}$$

A la surface des océans, $z = h$, donc $r = R_T + h$.

$$U + gz = \text{cte}$$

$$\text{donc } \frac{Gm_A}{2D^3} \underbrace{(R_T + h)^2}_{\text{négligé}} (1 - 3\cos^2(\theta)) + gh = \text{cte}$$

$$\text{donc } h = \frac{\text{cte}}{g} - \frac{Gm_A R_T^2}{2D^3 g} (1 - 3\cos^2(\theta))$$

h est donc plus grand à l'équateur.

d'où la forme allongée de la Terre. (cf. FIGURE 15)

$$\begin{aligned} \Delta h &= h(\cos) - h(\theta = \frac{\pi}{2}) \\ &= \frac{3Gm_A R_T^2}{2D^3 g} \end{aligned}$$

A.N. pour la Lune : $\Delta h_L = 54 \text{ cm}$

→ Résultat adéquat.

