CHAPITRE 11 : CINÉMATIQUE DES FLUIDES

I. Description d'un fluide en mouvement

1. Particule fluide

On divise, par la pensée, le fluide en petites particules appelées « particules fluides. ». Notons d leur diamètre.

d est à l'échelle mésoscopique

$$\ell \leq d \leq L$$

ℓ : 10^{-9} à 10^{-7} m ; d : 10 µm ; L : 1 m

ℓ : ne doit pas être inférieur au libre parcours moyen

Une particule fluide est assez grande pour lui définir des variables thermodynamiques (P, T, ρ, ...).
De plus, d est assez petit pour traiter les particules fluides comme des points matériels en mécanique.

2. Champs eulériens dans l'écoulement

On se place dans un référentiel $\mathcal{R}$.
Soit M un point donné.
A t, une particule fluide est en M. Elle possède $P, T, \rho, \vec{v}, \ldots$
On définit $P(M,t)$, $T(M,t)$, $\vec{v}(M,t)$, ...

Pour une grandeur F, F(M, t) : pour la particule en M à t.

En un point donné, les particules passent et se succèdent les unes aux autres.

3. Visualisation du champ de vitesse

(cf. FIGURE 1)

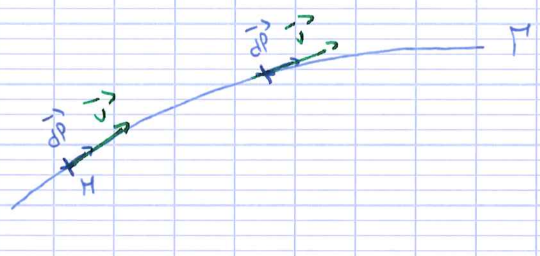
On introduit dans le fluide des particules visibles appelées « traceurs ».

Un traceur P se déplace.

$$\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \vec{v}(P(t), t).$$

On peut ainsi observer le champ eulérien de vitesse.

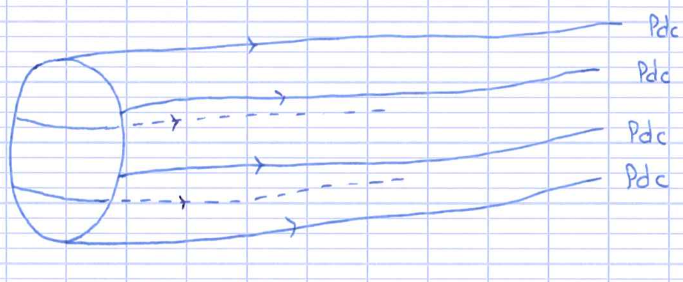
On définit une ligne de courant est une courbe en tout point tangente au vecteur vitesse.



$\forall M \in \Gamma$, $\overrightarrow{dP} \,/\!/\, \vec{v}(M,t)$

ce qui équivaut à ce que $\forall M \in \Gamma$, $\overrightarrow{dP} \wedge \vec{v}(M,t) = \vec{0}$.

On définit un tube de courant de la manière suivante :



4. Ecoulement stationnaire

Dans un écoulement stationnaire, les champs eulériens ne dépendent pas du temps.

$$\frac{\partial F}{\partial t}(M,t) = 0$$

En particulier, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(M,t) = \vec{0}$.

Dans ce cas, les trajectoires des particules se confondent avec les lignes de courant.

Remarque : le caractère stationnaire dépend du référentiel.

Exemple : mouvement de l'air autour d'une voiture
$\mathcal{R}_{voiture} \rightarrow$ stationnaire mais $\mathcal{R}_T \rightarrow$ non stationnaire.

Remarque : le fait que l'écoulement soit stationnaire n'implique pas que les grandeurs physiques d'une particule qui se déplace soient constantes.

5. Dérivée particulaire

A. Variation sur place dans un écoulement variable

Soit $F(M,t)$ une grandeur physique.
En M donné, F varie

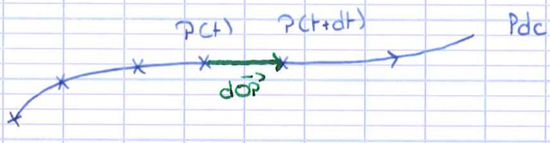
$$F(M, t+dt) - F(M,t) = \frac{\partial F(M,t)}{\partial t} dt$$

Variation convective
=> les variations sont dues au mouvement de la particule

B. Variation convective dans un écoulement stationnaire non uniforme

Soit $F(M, \cancel{t})$ une grandeur physique.

Soit $P(t)$ une particule.



$$F_P(t) = F(P(t)).$$

$$dF_P = F_P(t+dt) - F_P(t)$$
$$= F(P(t+dt)) - F(P(t))$$
$$= \overrightarrow{grad}\, F(P) \cdot \overrightarrow{dOP}$$

variation d'une fonction entre deux points voisins

$$\frac{dF_P}{dt} = \overrightarrow{grad}\, F(P) \cdot \frac{\overrightarrow{dOP}}{dt}$$

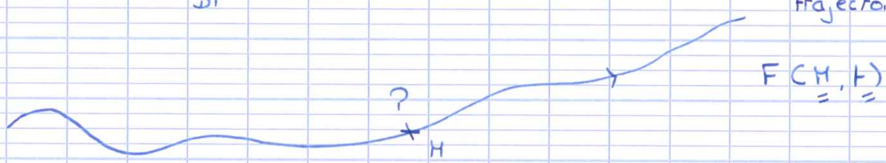
$$\text{Ainsi, } \boxed{\frac{dF_P}{dt} = \overrightarrow{grad}\, F(P) \cdot \vec{v}(P(t))}$$

C. Cas général

<u>Définition</u> : On appelle dérivée particulaire de la grandeur F en M à l'instant t la dérivée temporelle de $F_P(t)$, où P est la particule fluide qui passe en M à l'instant t.

On la note $\dfrac{DF(M,t)}{Dt}$.

$F(M(t), t)$.



$$\boxed{\frac{DF(M,t)}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial F(M,t)}{\partial t}}_{\text{variation temporelle}} + \underbrace{\vec{v}(M,t) \cdot \overrightarrow{grad}\, F(M,t)}_{\text{variation convective due au déplacement dû au temps}}}$$

Aparté mathématiques :

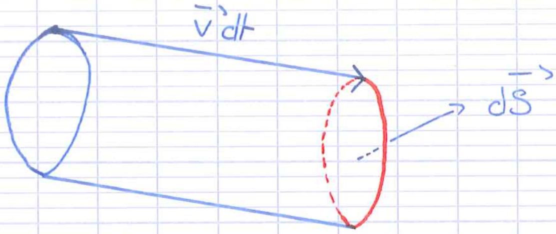
$$F_? : t \longmapsto F(x(t), y(t), z(t), t)$$

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{dF_?}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

$$= \vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}\, F + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

II. Masse et volume en écoulement

1. Transport de masse et transport de volume



Pendant dt, le volume qui traverse $\vec{dS}$ est

$$d^2\mathcal{V} = \vec{dS} \cdot \vec{v}\, dt$$

Pour une surface $\mathcal{S}$, $d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{S}} \vec{v} \cdot \vec{dS}\, dt$

Ainsi,

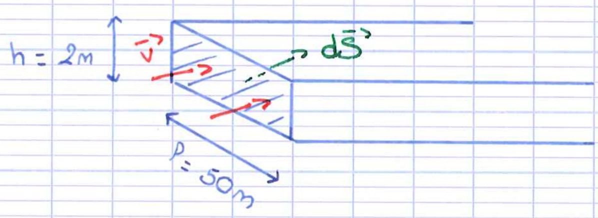
$$D_v = \frac{d\mathcal{V}}{dt} = \int_{\mathcal{S}} \vec{v} \cdot \vec{dS}$$ ---- débit volumique ($m^3.s^{-1}$)

$$D_m = \frac{dm}{dt} = \int_{\mathcal{S}} \rho \vec{v} \cdot \vec{dS}$$ ---- débit massique ($kg.s^{-1}$)

On pose : $\vec{j_m} = \rho \vec{v}$ (en $kg.s^{-1}.m^{-2}$)

vecteur densité de flux de masse

Exemple : canal



$v = 0,5 \ m.s^{-1}$

$D_v = vS$

$= vh\ell$

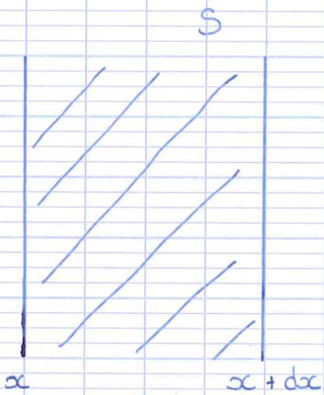
$= 0,5 \times 2 \times 50$

$= 50 \ m^3.s^{-1}$

2. Conservation de la masse : aspect local

La masse se conserve même si elle se déplace.

A une dimension : $\vec{j_m} = j_m(x,t)\,\vec{u_x}$



Pendant dt, le système reçoit :

* $dm_e = \left[j_m(x,t) - j_m(x+dx,t) \right] S\,dt$

$= -\dfrac{\partial j_m}{\partial x} S\,dx\,dt$

Pendant dt, le stock varie :

$m_{stock}(t) = \rho(x,t)\,S\,dx$

$m_{stock}(t+dt) = \rho(x,t+dt)\,S\,dx$

$dm_{stock} = \left[\rho(x,t+dt) - \rho(x,t) \right] S\,dx$

$= \dfrac{\partial \rho}{\partial t} S\,dx\,dt$

Bilan : $dm_{stock} = dm_e$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} S\,dx\,dt = -\frac{\partial j_m}{\partial x} S\,dx\,dt$$

(parfois appelée équation de continuité)

Ainsi, on en déduit l'équation de conservation de la masse :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_m}{\partial x} = 0}$$

A 3 dimensions : $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j_m}) = 0$.

Exemple : pompe à vélo (cf. FIGURE 3)

- $\vec{v} = v\vec{u_x}$
- ρ uniforme

$$\rho = \frac{m}{S\,a(t)}$$

donc $\rho_0 = \dfrac{m}{S\,a_0}$

donc $\dfrac{\rho}{\rho_0} = \dfrac{a_0}{a}$

donc $\rho = \rho_0 \dfrac{a_0}{a(t)}$

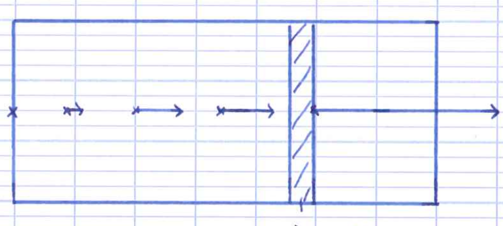
En reportant dans l'équation de la conservation, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 \frac{a_0}{a(t)}\right) + \operatorname{div}\left(\rho_0 \frac{a_0}{a(t)} \vec{v}\right) = 0$$

$$\rho_0 \frac{a_0}{a}\frac{\partial v}{\partial x} + \rho_0 a_0 \left(-\frac{\dot a}{a^2}\right) = 0$$

donc $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\dot a}{a}(t)$

donc $v = \dfrac{\dot a}{a} x + \underbrace{\cancel{cste}}_{0}$ (car $v(0) = 0$)



$\dot a > 0$

Exemple : Boule en expansion homogène (cf. FIGURE 4)

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3(t)} \quad ; \quad \rho_0 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_0^3}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{R_0^3}{R^3} \quad \text{donc} \quad \rho = \rho_0 \frac{R_0^3}{R^3}$$

$$\operatorname{div}\left(\rho_0 \frac{R_0^3}{R^3}\vec v\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 \frac{R_0^3}{R^3}\right) = 0$$

$$\rho_0 \frac{R_0^3}{R^3}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v) + \rho_0 R_0^3\left(-\frac{3\dot R}{R^4}\right) = 0$$

donc $\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 v) = r^2 \dfrac{3\dot R}{R}$

donc $r^2 v = r^3 \dfrac{\dot R}{R} + \underbrace{cste}_{0}$ (en $r = 0$, de cette équation on déduit $cste = 0$)

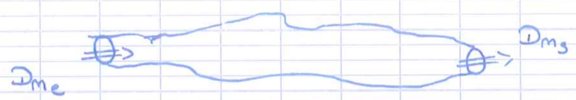
Ainsi, $v = r\dfrac{\dot R}{R}$.

Remarque : Dans un écoulement stationnaire, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

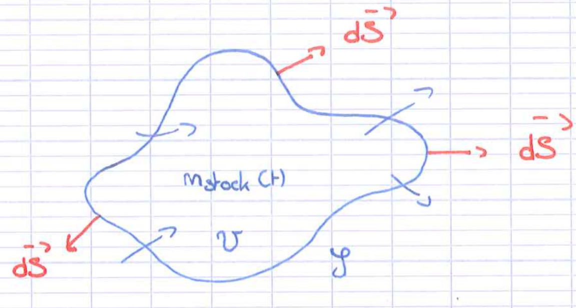
donc l'équation de conservation devient : $\mathrm{div}(\vec{j_m}) = 0$.

dès lors, j_m est à flux conservatif

donc le débit massique se conserve. $(D_{m_e} = D_{m_s})$.



3. Conservation de la masse : aspect intégral



Pendant dt, le stock varie :

- $m_{stock}(t) = \int_v \rho(M,t)\,d\tau$
- $m_{stock}(t+dt) = \int_v \rho(M,t+dt)\,d\tau$

$$dm_{stock}(t) = \int_v \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t}\,dt\,d\tau$$

Pendant dt, le système reçoit :

- $dm_e = -\oint_S \vec{j_m}\cdot\vec{dS}\,dt$

Bilan : $dm_{stock} = dm_e$

$$\iiint_v \frac{\partial \rho}{\partial t}\,d\tau = -\oint_S \vec{j_m}\cdot\vec{dS}$$

D'après la formule de Green et Ostrogradski :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau = - \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\vec{j_m})\, d\tau$$

L'égalité a lieu quelque soit le volume $\mathcal{V}$, donc

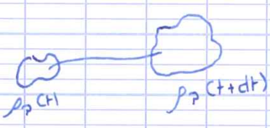
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{j_m})$$

On retrouve bien : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j_m}) = 0$

Ainsi, la relation de Green et Ostrogradski permet le passage d'un point de vue local (II.2.) à un point de vue intégral (II.3.).

4. Dérivée particulaire de la masse volumique

A. Analyse géométrique



(cf. FIGURE 5)

Si la vitesse n'est pas uniforme, les particules fluides se dilatent, leur masse volumique diminue.

B. Analyse vectorielle

On détermine $\frac{\partial \rho}{\partial t}$:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

donc $\rho \operatorname{div}(\vec{v}) + \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\rho) \cdot \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

or $$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{grad}(F)$$

donc $$\rho\, div(\vec{v}) + \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

Ainsi, $$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\, div(\vec{v})}.$$

Dérivée particulaire du volume :

$m_p = \rho_p V_p$ est constante

$$\frac{D}{Dt}\left(\ln(m_p)\right) = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} + \frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = 0$$

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}$$

Ainsi, $$\boxed{\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = div(\vec{v})}.$$

taux de dilatation volumique

Ainsi, $div(\vec{v})$ donne le taux de dilatation volumique des particules.

5. Ecoulement incompressible

Dans un écoulement incompressible, le taux de dilatation est nul.

Ainsi, $\forall M, \forall t$, $\operatorname{div}(\vec{v}(M,t)) = 0$.

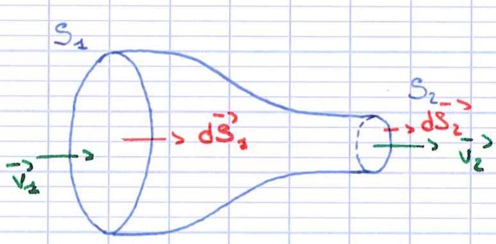
C'est une propriété indépendante du référentiel d'étude.

D'après Green et Ostrogradski :

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{v})\, d\tau = \oint_S \vec{v} \cdot \vec{dS}$$

or $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$ donc $\oint_S \vec{v} \cdot \vec{dS} = 0$

Pour un écoulement incompressible, $\vec{v}$ est à flux conservatif.
Ainsi, le débit volumique se conserve.



$D_{v_1} = D_{v_2}$.

$v_1 S_1 = v_2 S_2$

Voir la nuance avec la remarque de II.2.
(différence entre écoulement permanent et écoulement incompressible).

Dans une machine avec évaporation, on a conservation du débit massique mais pas du débit volumique.

Exemple : pompe à vélo

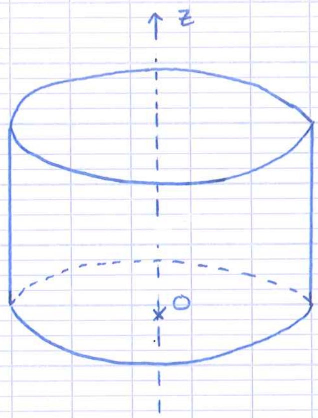
$$\vec{v} = \frac{\dot{a}}{a} x \vec{u_x}$$

$$\mathrm{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}}}_{0}$$

$$= \frac{\dot{a}}{a} \neq 0$$

⇒ Ecoulement compressible.

Exemple :



$$\vec{v} \begin{cases} v_r = -\alpha r & \alpha > 0 \\ v_\theta = 0 \\ v_z = ? \end{cases}$$

Hypothèse : écoulement incompressible

$$\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(-\alpha r^2) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$-2\alpha + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 2\alpha \longrightarrow v_z = 2\alpha z + \mathrm{cste}(r, \theta).$$

Le fond est supposé étanche : $v(z=0) = 0$

donc $cste(r,\theta) = 0$.

Ainsi, $v_z = 2\alpha z$

III. Vorticité

1. Rotationnel du champ de vitesse

nabla : $\vec{\nabla}$

en coordonnées cartésiennes : $\vec{\nabla}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

$$\boxed{\vec{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}}$$

$$\vec{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Remarque :

$\vec{grad} f = \vec{\nabla} f$

$div \vec{f} = \vec{\nabla} . \vec{f}$

$\Delta f = (\vec{\nabla}.\vec{\nabla}) f = \vec{\nabla}^2 f$.

Exemple : pompe à vélo

$$\vec{v} = \frac{\dot{a}}{a} x \vec{u_x}$$

$$\vec{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$$

Exemple : Boule en expansion homogène

$$\vec{v} = \frac{\dot{R}}{R} r \vec{u_r} = \frac{\dot{R}}{R} \vec{OM}$$

$$= \frac{\dot{R}}{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Avec le formulaire, on peut directement le faire en coordonnées sphériques.

donc $\vec{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$.

Exemple : (cf. FIGURE 6)

$$\vec{v} = r\omega \vec{e_\theta} \qquad \text{(coordonnées cylindriques)}$$

$$\vec{rot}(\vec{v}) = 2\omega \vec{e_z} \qquad \text{à l'aide du formulaire}$$

Exemple : (cf. FIGURE 7) Vortex de Burgers

$$\begin{cases} v_r = -\dfrac{2\nu}{c^2} r \\ v_\theta = A \dfrac{c^2}{r} \left(1 - e^{-r^2/c^2}\right) \\ v_z = \dfrac{4\nu}{c^2} z \end{cases}$$

$$\vec{rot}(\vec{v}) = \frac{1}{r}\left(-Ac^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(e^{-r^2/c^2}\right)\right) \vec{u_z}$$

$$= \frac{2}{c^2} A c^2 e^{-\frac{r^2}{c^2}} \vec{u_z}$$

$$= 2A e^{-\frac{r^2}{c^2}} \vec{u_z}.$$

2. Vecteur tourbillon

$\vec{rot}(\vec{v})$ mesure la présence de tourbillion dans l'écoulement.

On appelle vecteur tourbillion ou vorticité :

$\to$ $$\boxed{\vec{\Omega}_{(M)} = \frac{1}{2}\,\vec{rot}\,(\vec{v}_{(M)})}$$

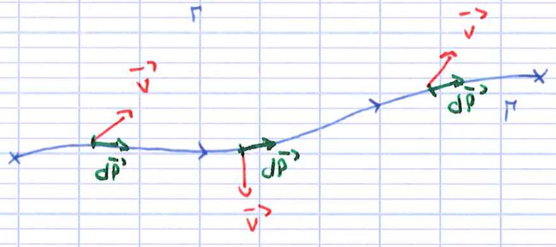
Pour une roue, $\vec{\Omega} = \omega\vec{e_z}$ est le vecteur rotation du solide. (cf. troisième exemple III.1.).

Pour le vortex de Burgers, $\vec{\Omega}$ n'est pas uniforme.

Remarque : $\vec{\Omega}$ dépend du référentiel.

3. Circulation du champ de vitesse

Définition : Soit Γ une courbe orientée et $\vec{v}$ un champ de vecteur. On appelle circulation de $\vec{v}$ le long de Γ la quantité scalaire $C = \int_\Gamma \vec{v}(M).\vec{dP}$.



Souvent, $\vec{v} \parallel \vec{dP}$:

Γ est une ligne de courant

donc $\vec{v}.\vec{dP} = \pm\, v dP$

si de plus, v = cste :

$$\mathcal{C} = \pm v \int dl$$
$$= \pm v l$$

Parfois, $\vec{v} \perp \vec{dl}$:

Γ est $\perp$ aux lignes de champ.

$$\vec{v} \cdot \vec{dl} = 0$$

donc $\mathcal{C} = 0$

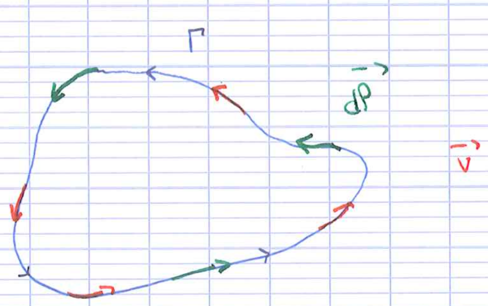
On voit que $\mathcal{C}$ mesure la manière dont les particules longent plus ou moins la courbe.

4. Cas d'une courbe fermée et lien avec la vorticité

Définition : Dans un écoulement tourbillonnaire, il existe au moins une courbe fermée le long de laquelle la circulation de la vitesse est non nulle.

Γ = ldc

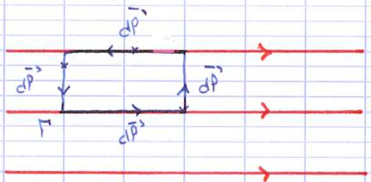
Exemple :



$$\mathcal{C} = \oint_{\Gamma} \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{dl}}_{> 0} > 0$$

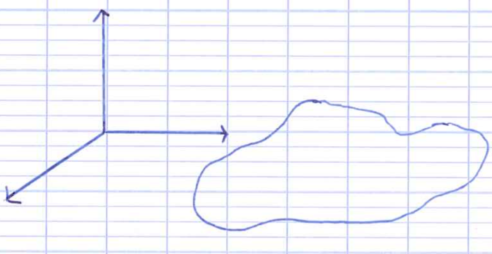
Exemple : cf. FIGURE 7.

Contre-exemple : pompe



$$\mathcal{C} = \oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot \vec{d\ell} = 0$$

Le lien de la définition précédente et le rotationel se fait par la formule de Stokes.



D'après la formule de Stockes :

$$\mathcal{C} = \oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot \vec{d\ell} = \int_{S} \vec{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{dS}$$

si, $\forall M$, $\vec{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$, $\mathcal{C} = 0$ => il n'y a pas de tourbillon.

Exemple : cf. FIGURE 8

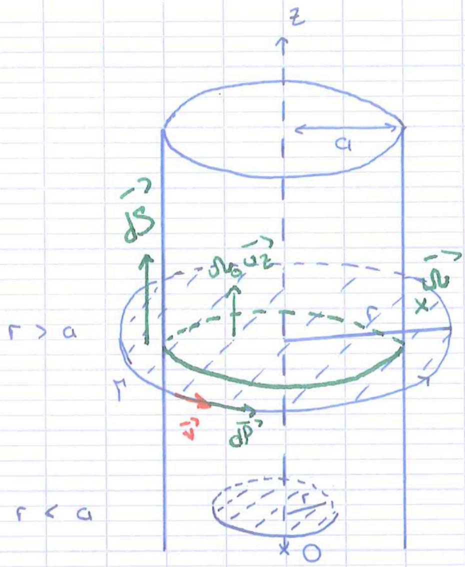
5. Vortex de Rankine

C'est un modèle académique de tourbillon.

On se donne $\vec{\Omega}$, on cherche $\vec{v}$.

Pour $r < a$, $\vec{\Omega}(M) = \Omega_0 \vec{u_z}$.

Pour $r > a$, $\vec{\Omega} = \vec{0}$.



On admet : $\vec{v} = v(r, \theta, z)\,\vec{u_\theta}$

De plus, il y a invariance par rotation et par translation.

Dès lors, $\vec{v} = v(r)\,\vec{u_\theta}$.

On prend pour Γ une ligne de courant, c'est-à-dire un cercle.

$$* \oint_\Gamma \vec{v}\cdot\vec{dl} = \oint_\Gamma v\,dl$$

$$= v(r)\oint_\Gamma dl$$

$$= v(r)\,2\pi r$$

Si $r \geq a$:

$$* \int_{\mathcal{S}} \vec{rot}(\vec{v})\cdot\vec{dS} = \int_{\mathcal{S}} 2\vec{\Omega}(M)\cdot\vec{dS}$$

$$= \int_{D_a} 2\Omega_0\vec{u_z}\cdot dS\,\vec{u_z}$$

$$= 2\Omega_0\int_{D_a} dS$$

$$= 2\Omega_0\pi a^2$$

donc $v(r)\,2\pi r = 2\Omega_0\pi a^2$

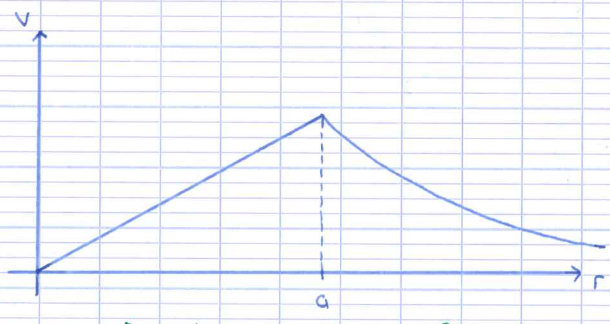
donc $v(r) = \dfrac{\Omega_0 a^2}{r}$.

Si $r < a$:

* $\int \overrightarrow{rot}(\vec{v}) \cdot \overrightarrow{dS} = 2\Omega_0 \pi r^2$

$v(r) 2\pi r = 2\Omega_0 \pi r^2$

donc $v(r) = \Omega_0 r$



6. Ecoulements irrotationnels

A. Définition et conséquence

Définition : Quelque soit M, $\overrightarrow{rot}(\vec{v}(M)) = 0$

$\Leftrightarrow \forall \Gamma$ fermée, $\oint_\Gamma \vec{v} \cdot \overrightarrow{dl} = 0$.

Conséquence : il existe φ : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \varphi(M) \end{array}$

telle que $\vec{v} = \overrightarrow{grad}\, \varphi$

potentiel de vitesse

φ est un outil mathématiques.

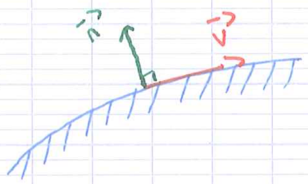
3. Ecoulement irrotationnel incompressible

$\forall M$, $div(\vec{v}(M)) = 0$

et $div(\overrightarrow{grad}\, \varphi) = 0$

$$\boxed{\text{donc} \quad \Delta \varphi = 0}$$

Conditions de bords des fluides non visqueux : (ou visqueux)



v est tangent aux obstacles imperméables.

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

donc $\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi) \cdot \vec{n} = 0$.

Si la paroi est en mouvement, on écrit :

$$(\vec{v} - \vec{v}_{paroi}) \cdot \vec{n} = 0$$

C. Exemple : écoulement autour d'une boule

(cf. FIGURE 9)

En coordonnées sphériques : $M(r, \theta, \cancel{\varphi})$
invariance par rotation

Le potentiel de vitesse $\varphi(M) = \varphi(r, \theta)$ vérifie $\Delta\varphi = 0$.
D'après le formulaire :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) = 0$$

Conditions de bords :

* $\forall \theta$, $\vec{v}(R, \theta) \cdot \vec{u}_r = 0$

  $v_r(R, \theta) = 0$

  $\frac{\partial \varphi}{\partial r}(R, \theta) = 0$

* si $r \to +\infty$, $\vec{v} \to \vec{U} = U\vec{e}_z$

  donc $\varphi \simeq Uz = Ur\cos(\theta)$.

L'unique solution est :

$$\varphi(r,\theta) = U\left(r + \frac{R^3}{2r^2}\right)\cos(\theta) .$$

Aparté mathématiques :

On connaît en coordonnées sphériques une base des fonctions dont le Laplacien est nul.
On les appelle les « harmoniques sphériques ».

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left[A_p r^p + B_p r^{-(p+1)} \right] P_p(\cos(\theta)) .$$

où P_p sont les polynômes de Legendre :

$$P_0(x) = 1 \; ; \; P_1(x) = x \; ; \; P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) .$$

* si $r \to +\infty$, $\varphi \to U r\cos(\theta)$,

$$A_0 + A_1 r\cos(\theta) + A_2 r^2 P_2 + \dots = U r\cos(\theta) .$$

donc $A_1 = U$ et $A_2 = A_3 = \dots = 0$

par ailleurs, A_0 est arbitrairement nul
(il n'interviendra pas dans $\vec{\text{grad}}$ puisque constant).

* si $r = R$:

$$A_1 P_1(\cos(\theta)) - \frac{2B_1}{R^3} + \sum_{\substack{p=0 \\ p\neq 1}}^{+\infty} B_p(-(p+1)) r^{-(p+2)} P_p(\cos(\theta)) = 0$$

$(\forall \theta)$

P infinité de racines

donc coefs. nuls.

$$\begin{cases} A_1 - \dfrac{2B_1}{R^3} = 0 \to B_1 = \dfrac{A_1 R^3}{2} = \dfrac{A_1 U}{2} . \\ p \neq 1 : B_p = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial r}\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\vec{u_\theta}$$

$$= U\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\cos(\theta)\vec{u_r} + - \dot{\theta} U\left(r + \frac{R^3}{2r^2}\right)\sin(\theta)\vec{u_\theta} .$$

Cela donne les lignes de courants.

× : points de stagnation

en $r = R$ et $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$

en ces points, $\vec{v} = \vec{0}$.