CHAPITRE 12 : FORCES DE CONTACT DANS UN FLUIDE

I. Forces de pression

1. Forces de volume et forces de surface

(cf. FIGURE 1)

Il existe 2 types de forces :

* forces de volume

↳ à distance, proportionnel à $d\tau$

- $\vec{dP} = dm\vec{g} = \rho d\tau \vec{g}$

$$\frac{\vec{dP}}{d\tau} = \rho \vec{g}.$$

- $\vec{dF_{ie}} = -dm\vec{a_e} = -\rho d\tau \vec{a_e}$

$$\frac{\vec{dF_{ie}}}{d\tau} = -\rho \vec{a_e}$$

- $\vec{dF_{ic}} = -\rho d\tau \vec{a_c}$

$$\frac{dF_{ic}}{d\tau} = -2\rho \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

- force électromagnétique :

$$\vec{dF} = dq\vec{E} + \text{"} I\vec{dl} \wedge \vec{B} \text{"}$$

$$\frac{dF}{d\tau} = \rho_{élec} \vec{E} + \vec{j_{élec}} \wedge \vec{B}.$$

→ Dans tous ces cas, on a une force de la forme : $\boxed{\vec{f} = \frac{\vec{dF}}{d\tau}}$

(en $N.m^{-3}$)

* forces de surface :

↳ forces de contact

$\vec{dF_S} \propto dS$

2. Forces de pression et utilisation

(cf. FIGURE 2)

Par définition, $\vec{dF_P}$ est la composante de $\vec{dF_S}$ colinéaire à $\vec{n}$.
Celles-ci sont la partie normale des forces de surface.

$\vec{dF_P} = (\vec{dF_S} . \vec{n})\vec{n}$ ($\vec{n}$ toujours orienté vers le système).

→ $\boxed{\vec{dF_P} = P\, dS\, \vec{n}}$

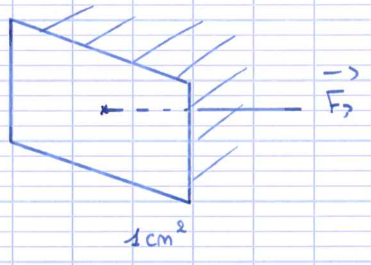
P : Pa ou $N.m^{-2}$

Exemple 1 :

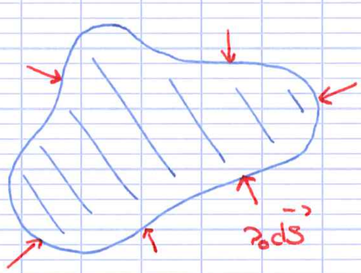
$\vec{F_P} = \int P_0\, dS\, \vec{n}$

$= P_0\, dS$

$= 10^5 . 10^{-4} = 10\ N$

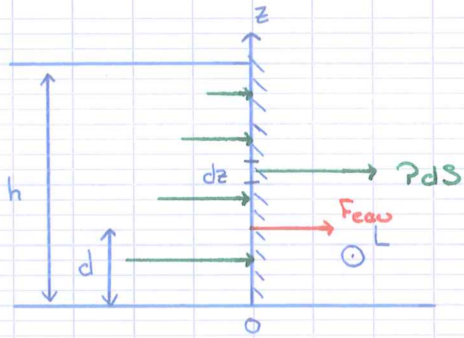


Théorème : P uniforme et S fermée



$\oint_S P_0\, \vec{dS} = \vec{0}$

Exemple 2 : barrage



$$P = P_0 + \rho g (h - z)$$

$$F_P = \int P d\vec{S}$$

$$= \int_0^h [P_0 + \rho g (h - z)] L dz$$

$$= \dots$$

$$= \left(h P_0 + \rho g \frac{h^2}{2} \right) L$$

On cherche le point d'application de la force de pression :

Moment en O :

$$\mathcal{M}_0 = \int z P dS$$

$$= \int_0^h z \left[P_0 + \rho g (h - z) \right] L dz .$$

$$\frac{\mathcal{M}_0}{L} = P_0 \frac{h^2}{2} + \rho g h \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} \rho g$$

$$= P_0 \frac{h^2}{2} + \rho g \frac{h^3}{6}$$

Les termes en P_0 sont compensés par l'air de l'autre côté du barrage.

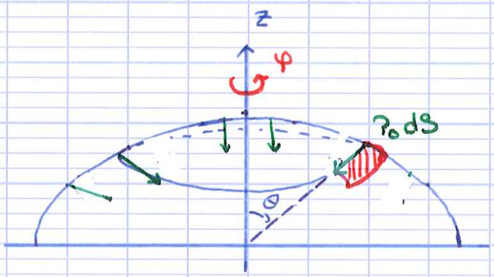
$$F_{eau} = \rho g \frac{h^2}{2} L$$

$$\mathcal{M}_{0_{eau}} = \rho g \frac{h^3}{6} L$$

On définit le point d'application par $d \times F_{eau} = \mathcal{M}_{0_{eau}}$

Ainsi, $d = \frac{h}{3}$.

Exemple 3 : hémisphère



Par symétrie, $\vec{F_P} \parallel \vec{u_z}$.

$$F_P = \int dF_{Pz} = -\int P_0 \cos(\theta)\, dS$$

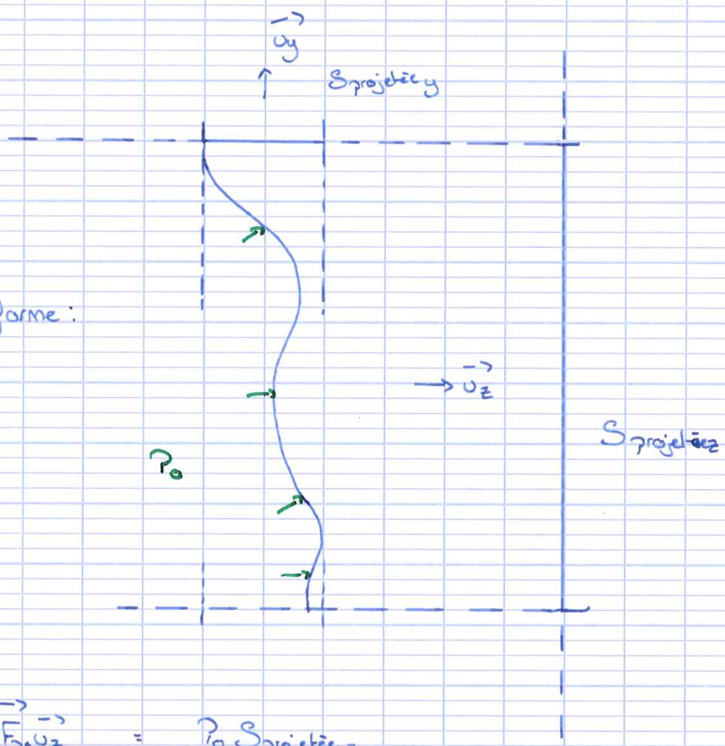
$$= -\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} P_0 \cos(\theta)\, R^2 \sin(\theta)\, d\theta\, d\varphi$$

$$= -P_0 \times 2\pi \times R^2 \times \left[\frac{1}{2}\sin(\theta)\right]_0^{\pi/2} = -P_0 \pi R^2.$$

On aurait obtenu la même réponse en utilisant la surface d'un disque.

Propriété :

A pression uniforme :



$$F_{Pz} = \int \vec{dF_P}\cdot\vec{u_z} = P_0\, S_{projetée\ z}$$

$$F_{Py} = \int \vec{dF_P}\cdot\vec{u_y} = P_0\, S_{projetée\ y}$$

3. Equivalent volumique des forces de pression

(cf. FIGURE 3)

Sur le cube s'exerce :

$$\overrightarrow{dF_{p\,tot}} = p(x,y,z)\,dy\,dz\,\vec{u_x} - p(x+dx,y,z)\,dy\,dz\,\vec{u_x} = -\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\,\vec{u_x}$$

$$+ p(x,y,z)\,dx\,dz\,\vec{u_y} - p(x,y+dy,z)\,dx\,dz\,\vec{u_y} \quad - \frac{\partial p}{\partial y}\,dx\,dy\,dz\,\vec{u_y}$$

$$+ p(x,y,z)\,dx\,dy\,\vec{u_z} - p(x,y,z+dz)\,dx\,dy\,\vec{u_z} \quad - \frac{\partial p}{\partial z}\,dx\,dy\,dz\,\vec{u_z}$$

donc $\overrightarrow{dF_{p\,tot}} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p)\,d\tau$ $\qquad d\tau = dx\,dy\,dz$.

On appelle équivalent volumique des forces de pression :

$$\boxed{\vec{f_p} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,p}$$

4. Statique des fluides

Dans un fluide au repos, il n'y a pas de forces de frottements (pas de forces visqueuses) : $\overrightarrow{dF_s} = \overrightarrow{dF_p}$

Une particule fluide de volume $d\tau$ est soumise à :

* $\vec{f}\,d\tau$ (volume)
* $\vec{f_p}\,d\tau$ (équivalent volumique)

A l'équilibre, $\vec{f} + \vec{f_p} = \vec{0}$

donc $\vec{f} - \vec{\nabla}p = \vec{0}$.

Relation fondamentale de la statique des fluides :

$$\overrightarrow{\nabla} P = \vec{f} \qquad (\overrightarrow{\nabla} P = \rho \vec{g}).$$

Applications :

* liquide : $\rho = \text{cste}$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \rightarrow P = -\rho g z + \text{cste}$$

* gaz : attention ρ n'est pas constant, il faut l'isoler

$$\rho = \frac{MP}{RT}$$

Théorème :

Pour un liquide (fluide incompressible) en équilibre dans un champ de force dérivant d'une énergie potentielle, les isobares sont confondues avec les équipotentiels.

Démonstration :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\nabla} \mathcal{E}_p \qquad \text{donc} \qquad \vec{F} = -m \overrightarrow{\nabla} e_p$$

$$\mathcal{E}_p = m \underbrace{e_p}_{J.kg^{-1}}$$

Pour une particule fluide, la force devient :

$$d\vec{F} = -dm \overrightarrow{\nabla} e_p = -\rho d\tau \overrightarrow{\nabla} e_p$$

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{d\tau} = -\rho \overrightarrow{\nabla} e_p$$

D'après la RFSF : $\vec{\nabla} P = \vec{f}$

donc $\vec{\nabla} P = -\rho \vec{\nabla} e_p$

donc $\vec{\nabla} P + \rho \vec{\nabla} e_p = \vec{0}$

car ρ cste.

donc $\vec{\nabla} (P + \rho e_p) = \vec{0}$

$\exists K$, $P(M) + \rho e_p(M) = K$.

Si $P(M) = \text{cste}$,

alors $e_p(M) = \dfrac{K - \text{cste}}{\rho} = \text{cste}'$.

En particulier, on retrouve la loi de Pascal : $e_p = gz$

$P + \rho g z = K$.

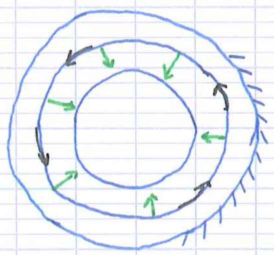
Corollaire : La surface libre est une isobare, $P = P_0$, donc c'est une équipotentielle.

II. Forces de viscosité

1. Mise en évidence et définition

(cf. FIGURE 4)

Les forces de viscosité sont la partie tangentielle des forces de surface (= contact).



- $\vec{dF_p}$
- $\vec{dF_v}$

Les couches de fluide s'entraînent en rotation grâce aux forces visqueuses.
Elles s'exercent aussi entre une paroi solide et le fluide

La viscosité est un phénomène diffusif : il y a transport de mouvement sans déplacement macroscopique associé du fluide.

2. Forces visqueuses dans un fluide Newtonien

(cf. FIGURE 5)

Les couches de fluide glissent les unes sur les autres.

A l'ordonnée y, la force exercée par le dessous sur le dessus s'écrit

$$\boxed{\vec{dF_v} = -\eta \frac{\partial v}{\partial y} dS \, \vec{u_x}}$$

← Loi de Newton

la couche inférieure moins rapide retient la couche supérieure

où η est la viscosité dynamique (en Pa.s).

OdG : $\eta = 1.10^{-3}$ Pa.s

3. Equivalent volumique des forces visqueuses

(cf. FIGURE 6)

$$\vec{dF_{v_{tot}}} = \vec{dF_v}(y) - \vec{dF_v}(y+dy)$$

$$= -\eta \frac{\partial v}{\partial y}(y) dS \, \vec{u_x} + \eta \frac{\partial v}{\partial y}(y+dy) dS \, \vec{u_x}$$

$$= \eta \, dS \left[\frac{\partial v}{\partial y}(y+dy) - \frac{\partial v}{\partial y}(y) \right] \vec{u_x}$$

donc $d\vec{F}_{v_{tot}} = \eta \, dS dy \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \vec{u_x}$

$= \eta \, d\tau \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \vec{u_x}$

On appelle équivalent volumique des forces de viscosité :

$$\boxed{\vec{f_v} = \frac{d\vec{F}_{v_{tot}}}{d\tau} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \vec{u_x}}$$

Dans le cas général, pour un fluide incompressible, on admet :

$$\boxed{\vec{f_v} = \eta \Delta \vec{v}}$$

Le Laplacien d'un vecteur est un vecteur.
En coordonnées cartésiennes, il a pour composantes les Laplaciens de chaque composante du-dit vecteur.

$$\Delta \vec{v} \begin{cases} \Delta v_x = \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \\ \Delta v_y = \ldots \\ \Delta_z = \ldots \end{cases}$$

⚠ Ce n'est pas aussi en cylindriques ou sphériques.

III. Forces de tension superficielle (HP).

1. Énergie interfaciale

L'interface entre un fluide et autre chose possède une énergie $E = \gamma S$.

γ : tension superficielle (en $J.m^{-2}$).

Des forces interfaciales lui sont associées.

En général, on les néglige, ce qui donne la continuité d'une pression à cette interface.

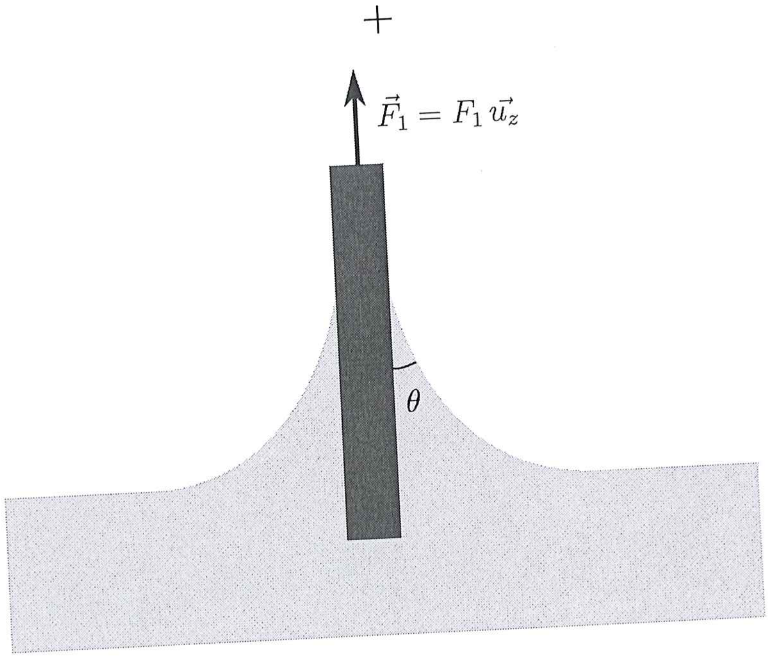


FIGURE 13 – Méthode d'arrachement pour la mesure de γ_{LV}

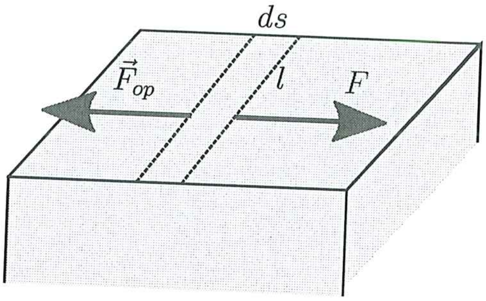


FIGURE 10 – Lien entre la définition énergétique et la définition dynamique de la tension superficielle.

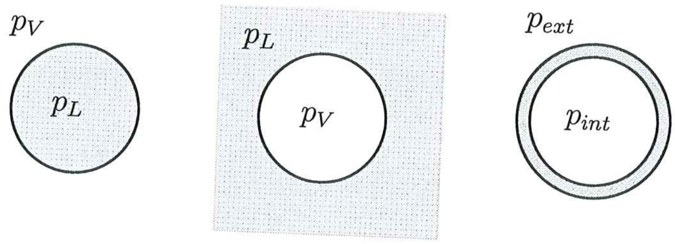


FIGURE 11 – Goutte, cavité et bulle illustrant la loi de Laplace.

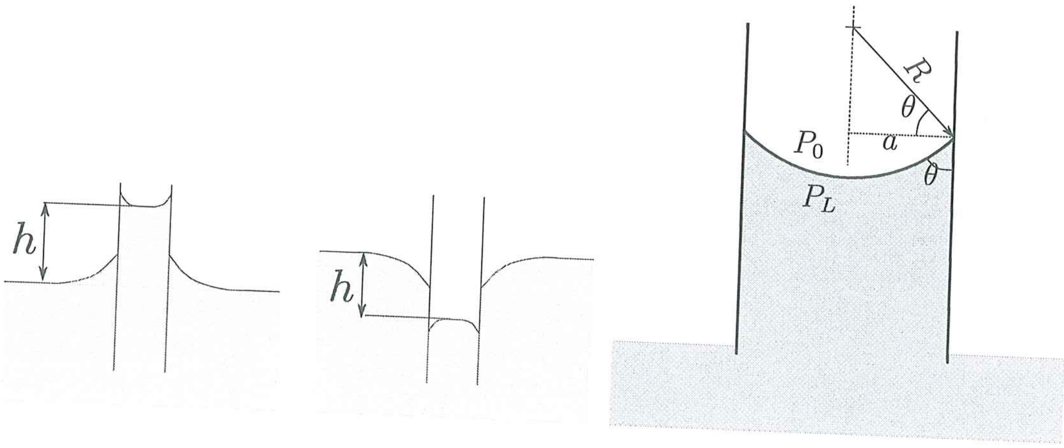


FIGURE 12 – Phénomène d'ascension capillaire et son étude théorique

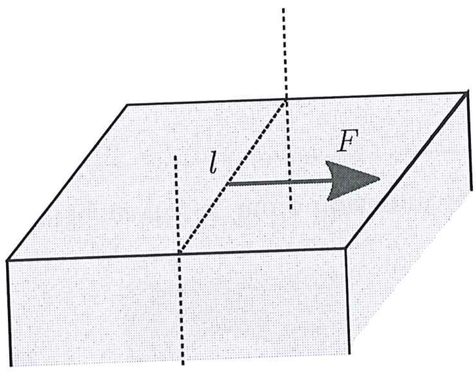


FIGURE 9 – Définition de la tension superficielle en terme de forces.