

CHAPITRE 13 : DYNAMIQUE DES FLUIDES

I. Dynamique locale des écoulements visqueux

1. Accélération particulière

Comme on suit une particulaire, l'accélération est :

$$\vec{a}(M, t) = \frac{\partial \vec{v}(M, t)}{\partial t}$$

→

$$\vec{a}(M, t) = \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

En effet,

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ a_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}$$

D'où l'écriture condensée précédente :

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Par ailleurs, on a également :

→

$$\vec{a}(M, t) = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(v^2) - \vec{v} \wedge \text{rot}(\vec{v})$$

2. Equation de Navier-Stokes et conditions de bord

Système : particule fluide de volume $d\mathcal{V}$.

$$PFD : \rho d\mathcal{V} \vec{a} = \int_P \vec{f}_P d\mathcal{V} + \int_V \vec{f}_V d\mathcal{V} + \int_{\text{autres}} \vec{f}_{\text{autres}} d\mathcal{V}$$

$$\text{donc } \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}P + \eta \Delta \vec{v} + \vec{f}_{\text{autres}}$$

On en déduit l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla}P + \eta \Delta \vec{v} + \vec{f}_{\text{autres}}$$

(pour les fluides newtoniens et incompressibles).

$\rho \vec{g}$ (souvent)

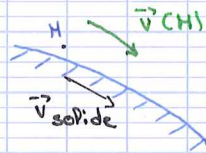
La plupart du temps, P et \vec{v} sont inconnues.

Conditions de bords :

* Pour P : connue aux bords

* Pour \vec{v} :

$$\vec{v}(H) = \vec{v}_{\text{solide}} \text{ sur la paroi}$$



Pour un solide immobile, $\vec{v}(H) = \vec{0}$

Dans de rares cas, $d\vec{F}_V$ est connu à la surface.

$$\text{Loi de Newton : } d\vec{F}_V = -\eta \frac{dv}{dy} \vec{u}_x dS$$

3. Ecoulement de Poiseuille plan

(cf. FIGURE 1)

Hypothèse : $\vec{v} = v(x, y, X) \vec{u}_x$
écoulement permanent

or le fluide est incompressible : $\text{div}(\vec{v}) = 0$

donc $\frac{dv}{dx} = 0$ (car \vec{v} n'a qu'une composante, selon \vec{u}_x).

donc $\vec{v} = v(y) \vec{u}_x$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

donc $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = v \frac{\partial}{\partial x}$

donc $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = v \frac{\partial}{\partial x} (v(y) \vec{u}_x) = \vec{0}$

Ainsi, $\vec{a} = \vec{0}$: évident en accompagnant une particule par la pensée.

$$\Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \\ \Delta v_z \end{pmatrix} = \frac{d^2 v}{dy^2}$$

On projette l'équation de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \vec{u}_x : 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{d^2 v}{dy^2} & (1) \\ \vec{u}_y : 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g & (2) \end{cases}$$

D'après (2) : $\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g$

donc $p = -\rho g y + K(x)$

On reporte dans (1) :

$$0 = -\frac{dK}{dx} + \eta \frac{d^2 v}{dy^2}$$

donc $\frac{dK}{dx}(x) = \eta \frac{d^2 v}{dy^2}(y)$

\overline{P} existe alors $\overline{D} \in \mathbb{R}$, tel que : (\overline{D} est une constante)

$$\frac{dK}{dx} = \overline{D} \quad \text{et} \quad \eta \frac{d^2v}{dy^2} = \overline{D}$$

$$\text{donc} \quad K = \overline{D}x + E$$

$$\overline{D} = \frac{P_2 - P_1}{L} < 0$$

$$\text{donc} \quad \frac{d^2v}{dy^2} = \frac{\overline{D}}{\eta} = \frac{P_2 - P_1}{\eta L}$$

$$\text{donc} \quad v = \frac{P_2 - P_1}{\eta L} \frac{y^2}{2} + Fy + G$$

Conditions de bord :

$$v(0) = 0 : G = 0$$

$$v(e) = 0 : F = -\frac{P_2 - P_1}{2\eta L} e$$

$$\text{donc} \quad v = \frac{P_2 - P_1}{2\eta L} (y^2 - ey)$$

$$= \frac{P_2 - P_1}{2\eta L} \left[\left(y - \frac{e}{2}\right)^2 - \frac{e^2}{4} \right]$$

→ Profil de vitesse parabolique

4. Ecoulement de Couette plan

(cf. FIGURE 2)

$$\text{On postule} : \vec{v} = v(x, y) \vec{u}_x$$

Seules les conditions de bords se trouvent modifiées :

$$K' = \frac{P_2 - P_1}{L} = 0$$

$$\text{donc} \quad \overline{D} = 0$$

donc $\frac{dv^2}{dy^2} = 0 \rightarrow v = Ay + B$

Or $\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(e) = v_0 \end{cases}$

Ainsi, $v = \frac{v_0}{e} y$
 \rightarrow vitesse linéaire

Force s'exerçant sur la paroi supérieure :

$$\begin{aligned} d\vec{F}_v &= -\eta \frac{dv}{dy} dS \vec{u}_x \\ &= -\eta \frac{v_0}{e} dS \vec{u}_x \end{aligned}$$

\Rightarrow

Ainsi, $\vec{F}_v = -\eta \frac{v_0}{e} LP \vec{u}_x$
 $= -\eta \frac{LP}{e} v_0 \vec{u}_x$

(forme typique pour un frottement visqueux)

5. Ecoulement de Poiseuille cylindrique

(cf. FIGURE 3)

On postule : $\vec{v} = v(r, z) \vec{u}_z$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ r \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

or $\text{div } \vec{v} = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ donc $\vec{v} = v(r) \vec{u}_z$

$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = v \frac{\partial}{\partial z}$

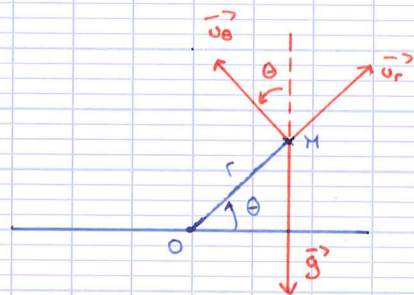
$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = v \frac{\partial}{\partial z} (v(r) \vec{u}_z) = \vec{0}$

momentanément, on pense en coordonnées cartésiennes

$$\Delta \vec{v} = \Delta (v \vec{u}_z) = (\Delta v) \vec{u}_z$$

donc
$$\Delta \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \vec{u}_z$$

On projette :
$$\vec{g} = -g \sin(\theta) \vec{u}_r - g \cos(\theta) \vec{u}_\theta$$



D'après l'équation de Navier-Stokes :

(1)	\vec{u}_r	$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{\partial p}{\partial r} - \rho g \sin(\theta) \\ 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} - \rho g \cos(\theta) \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \end{array} \right.$	<p>Dans un plan $z = \text{cte}$, on retrouve la loi de Poiseuille.</p>
(2)	\vec{u}_θ		
(3)	\vec{u}_z		

D'après (3) :
$$0 = -K'(z) + \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right)$$

$$K'(z) = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right)$$

\mathbb{P} existe alors $\exists \mathbb{D} \in \mathbb{R}$ tel que : $(\mathbb{D} = \text{cte})$

$$K'(z) = \mathbb{D} \quad \text{et} \quad \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \mathbb{D}$$

On trouve :
$$\mathbb{D} = \frac{p_2 - p_1}{L} \quad (\text{via } K'(z))$$

donc
$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{p_2 - p_1}{\eta L}$$

En intégrant,
$$r \frac{dv}{dr} = \frac{p_2 - p_1}{\eta L} \frac{r^2}{2} + \text{cte}$$

 $\xrightarrow{0}$ en évaluant en 0

$$\frac{dv}{dr} = \frac{p_2 - p_1}{\eta L} \frac{r}{2}$$

$$\int_{v(a)}^{v(r)} dv = \int_a^r \frac{p_2 - p_1}{\eta L} \frac{r'}{2} dr'$$

$$\text{donc } v(r) - v(a) = \frac{p_2 - p_1}{4\eta L} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right)$$

or $v(a) = 0$ (ca : en contact avec la paroi).

$$\text{Ainsi, } v(r) = \frac{p_2 - p_1}{4\eta L} \left(\frac{r^2 - a^2}{2} \right)$$

→ Profil de vitesse parabolique.

$$D_v = \int_{\text{Diague}} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^a \int_0^{2\pi} v(r) \vec{u}_z \cdot r dr d\theta \vec{u}_z$$

$$= 2\pi \int_0^a \frac{p_2 - p_1}{4\eta L} (r^2 - a^2) r dr$$

$$= \pi \frac{p_2 - p_1}{2\eta L} \left(\frac{a^4}{4} - a^2 \frac{a^2}{2} \right)$$

$$\text{Ainsi } D_v = \frac{\pi a^4}{8\eta L} (p_2 - p_1)$$

Cela rappelle $I = GU$ en électricité.

On note alors la conductance hydraulique G_{Hy} :

$$G_{Hy} = \frac{\pi a^4}{8\eta L} \quad (\text{et } R_{Hy} = \frac{1}{G_{Hy}})$$

6. Démarrage brutal d'un bord plan

(cf. FIGURE 4)

On postule : $\vec{v} = v(y, t) \vec{u}_x$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_x$$

$$\text{et } \Delta \vec{v} = (\Delta v) \vec{u}_x = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \vec{u}_x$$

⊙ après l'équation de Navier-Stokes : (NS)

$$\begin{array}{l} \text{NS } |x \\ \text{NS } |y \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \end{array} \right.$$

$$p = -\rho g y + K(x)$$

$$\text{Pour } y=h, p = p_0 : K = p_0 + \rho g h$$

$$\text{NS } |x : \rho \frac{dv}{dt} = 0 + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\text{donc } \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\rho}{\eta} \frac{dv}{dt} = 0$$

⊙ On pose ν la viscosité cinématique :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (\text{en } \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$$

Ainsi, on retrouve l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{\nu} \frac{dv}{dt} = 0$$

Conditions de bord et conditions initiales:

$$\forall t \geq 0, y = 0 : v(0, t) = v_0$$

$$\forall y > 0, t = 0 : v(y, 0) = 0$$

La solution de l'équation est alors :

$$v = v_0 \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right]$$

Observations: (cf. FIGURE 6)

Des couches de fluides de plus en plus pointues sont entraînées par la paroi.

On définit une épaisseur δ , représentant l'épaisseur de la couche de fluide allant rapidement, telle que :

$$v = v(y = \delta, t) = \frac{v_0}{2}$$

$$\text{donc } 1 - \operatorname{erf}(\cdot) = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{erf}(\cdot) = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \frac{\delta}{2\sqrt{\nu t}} \approx \frac{1}{2}$$

Ainsi, on retrouve la loi d'échelle de la diffusion :

$$\delta \approx \sqrt{\nu t}$$

II. Nombre de Reynolds et régimes d'écoulements

Soit un écoulement où :

- * U est l'ordre de grandeur de la vitesse
- * L est la longueur de l'échelle pertinente
(longueur de l'espace où v change significativement).
- * $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ est la viscosité cinématique.

Ainsi, on définit le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (\text{sans dimension})$$

1. Analyse d'ordre de grandeur

Notons le terme diffusif et le terme convectif respectivement :

$$\vec{Q}_{\text{diff}} = \eta \Delta \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{Q}_{\text{conv}} = \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

$$\text{ODG :} \quad \|\vec{Q}_{\text{diff}}\| \approx \eta \frac{U}{L^2} \quad \text{et} \quad \|\vec{Q}_{\text{conv}}\| \approx \rho \frac{U^2}{L}$$

$$\frac{\|\vec{Q}_{\text{conv}}\|}{\|\vec{Q}_{\text{diff}}\|} \approx \rho \frac{U^2}{L} \times \frac{L^2}{\eta U} = \frac{UL}{\eta/\rho} = \frac{UL}{\nu}$$

$$\frac{\|\vec{Q}_{\text{conv}}\|}{\|\vec{Q}_{\text{diff}}\|} \approx Re$$

→ Estimation grossière qui masque les particularités géométriques.

Dans les exemples de I., on a $\vec{Q}_{\text{conv}} = \vec{0}$,
l'ordre de grandeur est faux.

2. Classification des écoulements

* Si $Re \ll 1$: on néglige \vec{Q}_{conv} .

* NS devient :
$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}P + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}$$

=> Écoulement rampant.

De plus, si l'écoulement est stationnaire : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$.

$$\vec{0} = -\vec{\nabla}P + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}$$

div ↓

$$0 = -\Delta P + \eta \underbrace{\text{div}(\Delta \vec{v})}_{\Delta(\text{div} \vec{v}) = 0} + \rho \underbrace{\text{div} \vec{g}}_{=0}$$

donc $\Delta P = 0$.

* Si $Re \gg 1$: on néglige \vec{Q}_{diff} .

NS devient :
$$\rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla}P + \rho \vec{g} \quad (\text{cf. III}).$$

3. Règle empirique de Reynolds sur la turbulence

Écoulement laminaire : Dans un écoulement laminaire, les lignes de courants glissent les unes sur les autres et prennent l'allure de feuilles parallèles. Le champ de vitesses est bien ordonné à l'échelle macroscopique.

Écoulement turbulent : Dans un écoulement turbulent, les lignes de courants s'entremêlent de manière inextricable jusqu'à se mélanger à très petite échelle. Le champ de vitesse est très désordonné et présente des variations chaotiques.

Règle empirique de Reynolds :

Le régime d'écoulement observé est déterminé par la valeur du nombre de Reynolds, indépendamment des valeurs prises séparément par U , L et ν .

Pour une géométrie donnée, il existe en général une valeur critique Re_c de l'ordre de quelques milliers telle que :

- * si $Re \leq Re_c$, l'écoulement est laminaire.
- * si $Re > Re_c$, l'écoulement est turbulent.

Exemple : tuyau cylindrique

- $L = \varnothing = 2R$ (diamètre du tuyau).
- $U = \frac{Dv}{\pi R^2}$ (vitesse moyenne)

$$Re_c \approx 2400.$$

4. Écoulement autour d'une sphère

(cf. FIGURE 7)

La boule est fixe. (on se place dans un référentiel où c'est le cas).

On appelle :

- * $\vec{F}_T \parallel \vec{U}$: la force de traînée
- * $\vec{F}_p \perp \vec{U}$: la force de portance

$$\vec{i}_i, \vec{F}_p = \vec{0}.$$

\vec{F}_T est due aux forces de pression et aux forces visqueuses.



$$\vec{F}_T = 6\pi\eta R\vec{U} \quad (\text{d'après Stokes}) \quad [\text{à petits Reynolds}].$$

Les forces données ne prennent pas en compte la poussée d'Archimède: il faudra la rajouter.

On observe que pour $Re \ll 1$, $F_r \propto U$ et pour $Re \gg 10^3$, $F_r \propto U^2$. (cf. FIGURE 8)

On pose $F = C_d \pi R^2 \cdot \frac{1}{2} \rho V^2$ (à grands Reynolds)

avec $C_d = \frac{F}{\frac{1}{2} \pi R^2 \rho V^2} = \frac{6 \pi \eta R V}{\frac{1}{2} \pi R^2 \rho V^2}$

donc $C_d = \frac{12}{R \frac{\rho}{\eta} V} = \frac{24}{\frac{V}{\nu}}$

⊖ Ainsi, $C_d = \frac{24}{Re}$

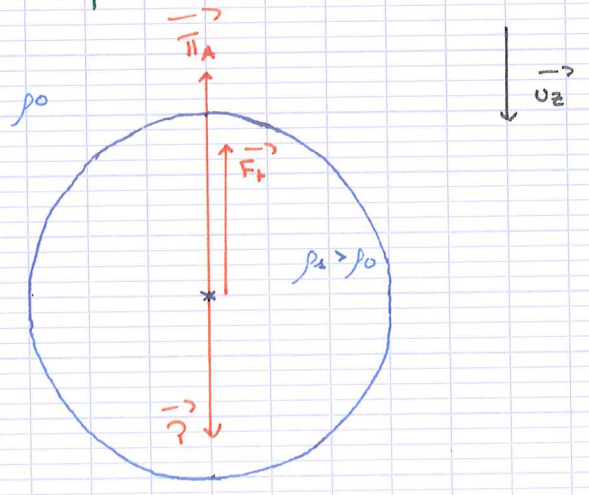
5. Chute d'une bille dans un liquide

Système : bille

Référentiel : terrestre

On cherche la vitesse limite v.

Dans le référentiel de la boule, on retrouve par le principe de Galilée la situation de 4., et donc les expressions de F_r .



$\frac{dv}{dt} = 0$, PFD :

$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_s g - \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0 g - F_r = 0$

donc $F_f(v) = \frac{4}{3} \pi R^3 g (\rho_s - \rho_0)$.

* si $Re \ll 1$, $F_f = 6\pi\eta Rv$

(1) $v = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 g (\rho_s - \rho_0)}{6\pi\eta R}$
 $= \frac{2}{9} \frac{g}{\eta} R (\rho_s - \rho_0)$.

* si $Re \gg 10^3$, $F_f = C_d \pi R^2 \frac{\rho_0}{2} v^2$

$\frac{4}{3} \pi R^3 g (\rho_s - \rho_0) = C_d \pi R^2 \frac{\rho_0}{2} v^2$

(2) $v = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{Rg}{C_d} \left(\frac{\rho_s - \rho_0}{\rho_0} \right)}$ où $C_d = 0,4$

A.N. acier, air, $R = 1 \text{ cm}$

On choisit par intuition (2) : $v = 63 \text{ m.s}^{-1}$

On vérifie :

$Re = \frac{v \times 2R}{\nu} = \frac{9 \cdot 10^4}{10^{-3}} \quad \text{OK!}$

A.N. verre, glycérine $\eta = 1 \text{ Pa.s}$, $R = 1 \text{ mm}$.

On choisit par intuition (1) : $v = 3 \text{ mm.s}^{-1}$

On vérifie : $Re = \frac{v \times 2R}{\nu} = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{1} \leq 1 \quad \text{OK!}$

III. Écoulement parfait

1. Couche limite selon le raisonnement de Stokes

(cf. FIGURE 9)

Par analogie avec I.6., les couches de fluide frottent les unes sur les autres et sont progressivement ralenties.

On note δ l'épaisseur de la couche de frottement (= couche limite).

$$L > \delta = \sqrt{\nu t}$$

Ici, $t = \frac{x}{U}$ est la durée pour atteindre l'abscisse x depuis le bord de l'aile.

$$\text{donc } \delta = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

$$\text{Au maximum, } \delta = \sqrt{\frac{\nu L}{U}}$$

(valable tant que la turbulence n'envahit pas l'écoulement).

$$\delta = L \sqrt{\frac{\nu}{UL}} = \frac{L}{\sqrt{Re}}$$

2. Couche limite par analyse d'ordre de grandeur

$$\begin{aligned} * \quad \vec{Q}_{\text{conv}} &= \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} && \text{car la } \odot \text{ grande} \\ \|\vec{Q}_{\text{conv}}\| &\approx \rho U \frac{\delta}{\delta x} U && \text{composante est selon } x. \\ &\approx \rho \frac{U^2}{L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \quad \vec{Q}_{\text{diff}} &= \eta \Delta v \\ \|\vec{Q}_{\text{diff}}\| &\approx \eta \frac{\delta^2}{\delta y^2} U \approx \eta \frac{U}{\delta^2} \end{aligned}$$

La vitesse passe de 0 au contact du solide à environ U sur une distance de quelques δ .

On définit δ par $\|\vec{Q}_{diff}\| \approx \|\vec{Q}_{conv}\|$

$$\eta \frac{U}{\delta^2} \approx \rho \frac{U^2}{L}$$

$$\text{donc } \delta = \sqrt{\frac{\eta L}{\rho U}} = \sqrt{\frac{\nu L}{U}}$$

Conclusion :

→ Quand un fluide visqueux passe près d'un obstacle, les frottements sont sensibles sur une zone proche du solide et d'épaisseur δ . On l'appelle couche limite.

3. Écoulement parfait et équation d'Euler

Définition : Dans un écoulement parfait, tout phénomène diffusif est négligé. Les particules fluides évoluent de manière adiabatique réversible, c'est-à-dire isentropique.

On néglige donc :

- * la viscosité
- * diffusion thermique et de particules.

Quand $Re \gg 1$, $\delta \ll L$.

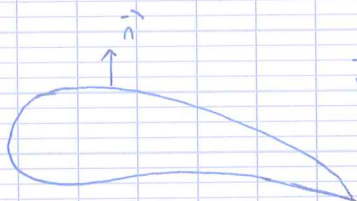
En dehors de cette mince couche d'épaisseur négligeable, on a un écoulement parfait.

$$\frac{Q_{conv}}{Q_{diff}} \approx Re \gg 1.$$

Q_{diff} négligeable (hors couche limite).

L'équation de Navier-Stokes devient l'équation d'Euler :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \vec{f}_{autres}$$



$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{objet immobile})$$

ou

$$(\vec{v} - \vec{v}_{obs}) \cdot \vec{n} = 0$$

(si obstacle mobile)

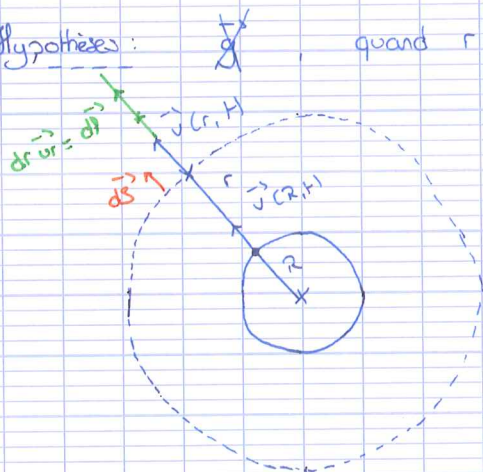
On peut projeter l'équation d'Euler ou l'utiliser dans une circulation.

4. Exemples

A. Implosion d'une cavité vide

(cf. FIGURE 11)

hypothèses :



quand $r \rightarrow +\infty$, $p \rightarrow p_0$ incompressible

$$\downarrow \text{div}(\vec{v}) = 0$$

(ou conservation du débit)

$$v(r,t) = \frac{dCR}{dt}$$

Conservation du débit volumique : $4\pi r^2 v(r,t) = 4\pi R^2 v(R,t)$

donc $v(r,t) = \frac{R^2 \dot{R}}{r^2}$ (aussi faisable par $\text{div}(\vec{v}) = 0$)

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{2} \text{grad}(v^2) - \vec{v} \wedge \text{rot}(\vec{v})$$

or $\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$ (cf. formulaire).

$$\text{Euler : } \rho \left(\frac{2R\dot{R}^2 + R^2\ddot{R}}{R^2} \vec{u}_r + \frac{1}{2} \text{grad}(v^2) \right) = -\vec{\nabla}P$$

$$\text{Rappel : } df = \text{grad}f \cdot d\vec{p}$$

$$\text{donc } \rho \left(\int_{r=R}^{\infty} \frac{2R\dot{R}^2 + R^2\ddot{R}}{r^2} dr + \int_{v(R)}^{v(\infty)} \frac{1}{2} dv^2 \right) = \int_{P(R)}^{P(\infty)} -dP$$

$$\frac{dr}{r^2} \rightarrow -\frac{1}{r}$$

$$\text{donc } \rho (2R\dot{R}^2 + R^2\ddot{R}) \frac{1}{R} + \rho \frac{1}{2} (0 - \dot{R}^2) = - (P_0 - 0)$$

$$\text{donc } \frac{3}{2} \dot{R}^2 + R\ddot{R} = -\frac{P_0}{\rho}$$

Equation différentielle non linéaire d'ordre 2 de $t \mapsto R(t)$.
On trouve : (en posant $Z = \dot{R}^2$).

$$Z = \frac{2P_0}{3\rho} \left(\frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right)$$

$$\text{donc } \frac{dR}{dt} = - \sqrt{\frac{2P_0}{3\rho} \left(\frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right)}$$

ou la cavité implose. (sa dérivée est négative).

$$\text{donc } \int_{R_0}^{R=0} \frac{dR}{\sqrt{\frac{R_0^3}{R^3} - 1}} = - \sqrt{\frac{2P_0}{3\rho}} \int_0^{t_f} dt$$

$$R_0 (-0,747) = - \sqrt{\frac{2P_0}{3\rho}} t_f$$

$$\text{Ainsi, } t_f = 0,747 R_0 \sqrt{\frac{3\rho}{2P_0}}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2x^3} - 1}} = 0,747$$

A.N. $R_0 = 1 \text{ mm}$ donc $t_f = 10^{-4} \text{ s}$.
 $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$
 $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$.

IV. Relation de Bernoulli

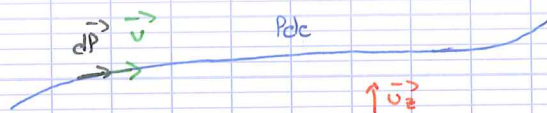
On considère toujours un écoulement parfait.

1. Énoncé et démonstration

Soit un écoulement parfait, stationnaire et incompressible sous l'effet des seules forces de pression et de pesanteur. Alors, la somme $P + mgz + \frac{1}{2}\rho v^2$ est constante le long de chaque ligne de courant

La somme " $P + mgz + \frac{1}{2}\rho v^2$ " est appelée la charge.

Démonstration :



$$\rho \left(\frac{\delta \vec{v}}{\delta t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\text{grad } P + \rho \vec{g}$$

$$\rho \left(\frac{1}{2} dv^2 - \underbrace{(\vec{v} \wedge \text{rot } \vec{v}) \cdot d\vec{P}}_{\substack{\perp \vec{v} \\ = 0}} \right) = -dP - \rho g \vec{u}_z \cdot d\vec{P}$$

$$\frac{1}{2} \rho dv^2 + dP + \rho g dz = 0$$

or, le fluide est incompressible, $\rho = \text{cte}$ sur la ligne de courant.

$$\text{donc } d \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + P + \rho g z \right) = 0$$

donc $\rho + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{cste.}$

Remarque : En supposant $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$ et $\rho = \text{cste}$ dans tout le fluide, l'hypothèse de suivre une ligne de courant n'apporte plus rien, $\rho + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{cste}$ dans tout le fluide.

2. Formule de Torricelli:

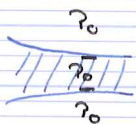
(cf. FIGURE 12)

On admet l'écoulement parfait et incompressible.

Comme h diminue, le régime n'est pas vraiment stationnaire, mais on fera comme si. Approximation d'un régime quasi-stationnaire.

D'après la relation de Bernoulli :

jet : \downarrow



$$\underbrace{p_A}_{=p_0} + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = \underbrace{p_B}_{=p_0} + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B$$

Conservation du débit : $vS = v'S'$

donc $\frac{1}{2}\rho \left(\frac{vS}{S'}\right)^2 + \rho g z_A = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z_B$

$$\frac{1}{2}v^2 \left(1 - \frac{S^2}{S'^2}\right) = g \underbrace{(z_A - z_B)}_{=h}$$

$$\frac{dh}{dt} = -v = -\frac{S}{S'}v$$

$$= -\frac{S}{S'}\sqrt{2gh}$$

Ainsi, $v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{S^2}{S'^2}}}$

$\ll 1$ donc $v \ll v'$

$$v \approx \sqrt{2gh}$$

\rightarrow rappelle une vitesse de chute libre.

3. Effet Venturi

C'est la baisse de pression associée à l'augmentation de la vitesse dans un étranglement.

A. Aspect qualitatif

(cf. FIGURE 13)

B. Mesure de débit par effet Venturi

(cf. FIGURE 14)

Relation de Bernoulli :

$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B$$

$(z_A = z_B)$

or $v_B S_B = v_A S_A$ donc $v_B = \frac{S_A}{S_B} v_A$

$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{S_A}{S_B} v_A \right)^2$$

$$P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho v_A^2 \left[\frac{S_A^2}{S_B^2} - 1 \right]$$

> 0

Cette différence de pression est rendue visible par deux tubes.

Equation d'Euler :

$$\rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) + \underbrace{(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}}_{\substack{\text{pas de mouvement} \\ \text{vertical près de A.}}} = -\vec{\nabla} P - \rho \vec{g}$$

En projection selon \vec{u}_z :

$$0 = -\frac{\delta p}{\delta z} - \rho g$$

donc $\frac{\delta p}{\delta z} = -\rho g$.

Alors, $p_A' - p_A = -\rho g h_A$

donc $p_A - p_0 = \rho g h_A$

De même, $p_B - p_0 = \rho g h_B$.

donc $p_A - p_B = \rho g (h_A - h_B)$.

donc $\frac{1}{2} \rho v_A^2 \left[\frac{S_A^2}{S_B^2} - 1 \right] = \rho g (h_A - h_B)$.

Ainsi, $v_A = \sqrt{\frac{2g(h_A - h_B)}{\frac{S_A^2}{S_B^2} - 1}}$

4. Pression d'arrêt et tube de Pitot

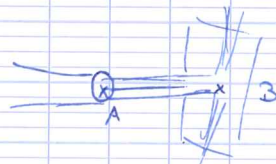
On oublie gz .

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

Si $v \downarrow$, $p \uparrow$.

Si $v_B = 0$, $p_B = p_{\max}$.

$$p_B = p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 > p_A$$



(exemple: on arrête un jet avec notre main).

Tube de Pitot : (cf. FIGURE 15)

Entre $-\infty$ et C :

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 = P_c + \frac{1}{2}\rho \times 0^2$$

$$P_c = P_0 + \frac{1}{2}\rho U^2$$

Au contraire, $v_D \approx U$, donc $P_D \approx P_0$.

$$\text{donc } P_c = P_D + \frac{1}{2}\rho U^2$$

$$\text{i.e. } P_c - P_D = \frac{1}{2}\rho U^2$$

$$\text{d'où } U \approx \sqrt{\frac{2}{\rho}(P_c - P_D)}$$

En mesurant l'écart de pression, on accède à la vitesse U .

→ Système utilisé pour mesurer la vitesse relative du vent par rapport à un avion.

5. Force de Magnus et portance

(cf. FIGURE 16)

A. Force de Magnus sur un cylindre en rotation

La rotation du cylindre entraîne des différences de vitesse et donc une force de portance.

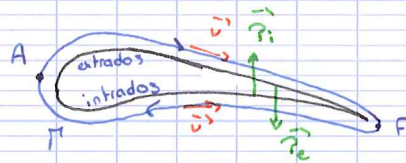
→ Rotation utilisée dans les sports de balle.

3. Portance d'une aile d'avion

On peut relier la portance et la circulation de la vitesse.

Circulation de \vec{v} :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \oint \vec{v} \cdot d\vec{p} \\ &= \int_A^F \vec{v}_e \cdot d\vec{p} + \int_F^A \vec{v}_i \cdot d\vec{p} \\ &\simeq \langle v_e \rangle c - \langle v_i \rangle c \end{aligned}$$



donc $\mathcal{C} = c(\langle v_e \rangle - \langle v_i \rangle)$.

* sur Pdc extrados :

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 = P_e + \frac{1}{2} \rho v_e^2 \quad (\text{Bernoulli})$$

$$\begin{aligned} P_e &= P_0 + \frac{1}{2} \rho (U^2 - v_e^2) \\ &= P_0 + \frac{1}{2} \rho \underbrace{(U - v_e)}_{-c} \underbrace{(U + v_e)}_{2U + c} \end{aligned}$$

$$v_e = U + c$$

$$\simeq P_0 + \frac{1}{2} \rho (U - v_e) \times 2U$$

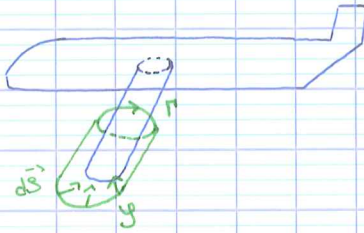
* sur Pdc intrados :

$$P_i = P_0 + \rho (U - v_i) U$$

$$\begin{aligned}
 F_T &= \int_{\text{aile}} (p_i - p_e) dS \\
 &\approx Lc \langle p_i - p_e \rangle \\
 &= Lc \langle U (v_e - v_i) \rho \rangle \\
 &\approx Lc \rho U \langle v_e - v_i \rangle
 \end{aligned}$$

Ainsi, $F_T = L \rho U C$

Théorème de Kutta-Joukowski.



$$C = \oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{p} = \int_S \text{rot}(\vec{v}) \cdot d\vec{S} = \int_S 2\vec{\omega} \cdot d\vec{S} \quad (\text{Stokes})$$

$$F_T > 0, \text{ donc } C > 0 \text{ donc } \int_S 2\vec{\omega} \cdot d\vec{S} > 0$$

d'où l'existence d'un tourbillon au bord de l'aile.

6. Bonus

~~X~~

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 = C_0$$

Soit U un maximum de v .

$$\text{On pose } P_0 \text{ tel que } P_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 = C_0.$$

En un point d'arrêt, $v = 0$.

D'après la relation de Bernoulli :

$$P_{\max} + \frac{1}{2}\rho 0^2 = C_0$$

$$\text{donc } P_{\max} = P_0 + \frac{1}{2}\rho U^2$$

$$\Delta P = P_{\max} - P_0 = \frac{1}{2}\rho U^2$$

$$\text{or } \chi_s = -\frac{1}{v} \left. \frac{\partial v}{\partial P} \right|_s = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_s$$

Ecoulement parfait

\Rightarrow Evolution isentropique

$$\chi_s \approx \frac{1}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta P}$$

$$\text{donc } \frac{\delta \rho}{\rho} \approx \chi_s \delta P$$

L'hypothèse incompressible est validée si $\frac{\delta \rho}{\rho} \ll 1$.

i.e. si $\chi_s \delta P \ll 1$.

i.e. si $\chi_s \frac{1}{2}\rho U^2 \ll 1$.

$$\text{i.e. si } U \ll \frac{1}{\sqrt{\rho \chi_s}} = c_{\text{son}}$$

(c_{son} dans le fluide).