CHAPITRE 14 - BILANS EN MÉCANIQUE DES FLUIDES

Au lieu de raisonner à l'échelle de la particule fluide, on raisonne à l'échelle de l'écoulement.

I. Contexte et méthode

1. Systèmes ouverts et surface de contrôle

3. Bilan de masse

(cf. FIGURE 2)

Pour les problèmes avec système ouvert, il est souvent utile de commencer par un bilan de masse.

Plutôt que d'utiliser le flux de $\vec{j_m}$, on va se ramener à un système fermé. (Σ)

A t, la masse de Σ est,

$$m(t) = \delta m_e + M_{com}(t)$$

A $t+dt$, la masse de Σ est,

$$m(t+dt) = \delta m_s + M_{com}(t+dt).$$

$$\begin{aligned} dm &= m(t+dt) - m(t) \\ &= \delta m_s - \delta m_e + M_{com}(t+dt) - M_{com}(t) \\ &= \delta m_s - \delta m_e + dM_{com} \end{aligned}$$

Pour un système fermé, la masse est constante, donc $dm = 0$.

donc $dM_{com} = \delta m_e - \delta m_s$.

En régime stationnaire, la zone commune n'évolue pas, donc $dM_{com}(t) = 0$.

donc $\delta m_e = \delta m_s$

$\frac{1}{dt}$

$$D_{m_e} = D_{m_s}$$

Le débit massique se conserve. (en 2.3).

II. Bilans de quantité de mouvement

1. Efforts sur une conduite coudée

(cf. FIGURE 3)

On cherche les efforts exercés par l'eau sur le tuyau sans déterminer le champ de pression ni le champ de vitesse dans ce tuyau.

En régime stationnaire, $D_{m_e} = D_{m_s}$.

donc $\rho S v_1 = \rho S v_2$ (on suppose le fluide incompressible).

donc $v_1 = v_2$.

Bilan de quantité de mouvement pour le système fermé $\{eau\}$ de la figure :
(domaine particulaire de fluide).

A → B
A' → B'

* à (t) : $\vec{p}(t) = \delta m \vec{v_1} + \vec{p}_{com}(t)$
* à $(t+dt)$: $\vec{p}(t+dt) = \delta m \vec{v_2} + p_{com}(t+dt)$.

donc $d\vec{p} = \delta m (\vec{v_2} - \vec{v_1}) + d\vec{p}_{com}$

or, $d\vec{p}_{com} = \vec{0}$ (RS)

donc $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = D_m (\vec{v_2} - \vec{v_1})$.

Forces extérieures : (à faire avec soin !).

* Poids : $m\vec{g}$
* pression : $P_1 S \vec{u_x}$
  et $-P_2 S \vec{u_y}$
* Contacts sur le tuyau (pression / viscosité) :
  $\vec{F}_{t/e} = -\vec{F}_{e/t}$

ζ = PFD

= 2^{nde} Loi de Newton

= théorème de la résultante cinétique

D'après le théorème de la quantité de mouvement :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F_{ext}}$$

$$D_m (\vec{v_2} - \vec{v_1}) = m\vec{g} + P_1 S \vec{u_x} - P_2 S \vec{u_y} - \vec{F_{e/t}} .$$

$$\vec{F_{e/t}} = m\vec{g} + P_1 S \vec{u_x} - P_2 S \vec{u_y} + D_m (\vec{v_1} - \vec{v_2})$$

or $v_1 = v_2 = v$ et $D_m = \rho S v$.

$$\vec{F_{e/t}} = m\vec{g} + P_1 S \vec{u_x} - P_2 S \vec{u_y} + \rho S v^2 (\vec{u_x} - \vec{u_y}) .$$

Ainsi, $\vec{F_{e/t}} = m\vec{g} + \left[(P_1 + \rho v^2) S \vec{u_x} - (P_2 + \rho v^2) S \vec{u_y} \right]$.

Termes liés à l'écoulement :

$\vec{F} = \rho S v^2 (\vec{u_x} - \vec{u_y})$ $\longrightarrow$ Facile à comprendre, les forces de contact doivent dévier les particules fluides (un peu comme des ballons !) → puis principe des actions réciproques.

$|\vec{F}| = \rho S v^2 \sqrt{2}$.

A.N. $\rho = 10^3$ kg.m^{-3} $S = \pi \times 0{,}01^2$ m $v = 1$ m.s^{-1}

$$|\vec{F}| = 10^3 \times \pi \times 0{,}01^2 \times 1^2 \times 1{,}44$$

$$= 0{,}44 \text{ N} .$$

2. Efforts exercés par un jet présentant une surface libre (cf. FIGURE 4)

On cherche la résultante des forces exercées par les fluides sur le transat.

Pour le système fermé étudié :

* à t : $\vec{p}(t) = \delta m \vec{v_1} + \vec{p}_{com}(t)$
* à $t+dt$: $\vec{p}(t+dt) = \delta m \vec{v_2} + \vec{p}_{com}(t+dt)$

donc $d\vec{p} = \delta m(\vec{v_2} - \vec{v_1}) + \underbrace{d\vec{p}_{com}(t)}_{=0}$ (RS).

donc $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = D_m(\vec{v_2} - \vec{v_1})$.

Forces extérieures : (sur l'eau du système)

* $m\vec{g}$
* $\displaystyle\int_{S\,libre} -p_0\, d\vec{S}$
* $\vec{F}_{t/e} = -\vec{F}_{e/t}$.

D'après le théorème de la quantité de mouvement :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}.$$

$$D_m(\vec{v_2} - \vec{v_1}) = m\vec{g} - \int_{S\,libre} p_0\, d\vec{S} - \vec{F}_{e/t}$$

$$\vec{F}_{e/t} = m\vec{g} - \int_{S\,libre} p_0\, d\vec{S} + D_m(\vec{v_1} - \vec{v_2})$$

Le transat est encore soumis à :

$$\int_{S\ \text{sèche}} -p_0 \, d\vec{S}$$

Au total, le transat est soumis à :

$$\vec{F}_{f/t} = m\vec{g} + D_m(\vec{v_1} - \vec{v_2}) - \underbrace{\oint_{S_{\text{libre}} \cup S_{\text{sèche}}} p_0 \, d\vec{S}}_{=\vec{0}}$$

$$D_m = \rho S_1 v_1$$
$$\vec{v_1} = v\vec{u_y}$$
$$\vec{v_2} = v_2\left(\cos(\alpha)\vec{u_y} + \sin(\alpha)\vec{u_z}\right).$$

3. Propulsion par réaction

(cf. FIGURE 5)

Dans cet exemple, le régime est non stationnaire.

Notons $M(t)$ la masse du mobile.
Notons $\vec{V}(t)$ la vitesse du mobile.
Notons $\vec{u}(t)$ la vitesse d'éjection du fluide, mesurée dans le référentiel du mobile.

On cherche l'équation du mouvement du mobile.

Pour le système fermé associé : (dans $R_{\text{laboratoire}}$)

* à t : $\vec{p}(t) = M(t)\vec{V}(t)$
* à $t + dt$: $\vec{p}(t+dt) = M(t+dt)\vec{V}(t+dt) + \delta m\left(\underbrace{\vec{V} + \vec{u}}_{\text{par composition des vitesses}}\right)$

donc $d\vec{p} = d(M\vec{V}) + \delta m(\vec{u} + \vec{V})$.

$$d\vec{p} = dM \cdot \vec{V} + M d\vec{V} + \delta m(\vec{V} + \vec{u}).$$

Comme δm est éjecté par le mobile, $dM = -\delta m$.

donc $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = M\dfrac{d\vec{V}}{dt} + D_m \vec{u}$.

D'après le théorème de la quantité de mouvement :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F_{ext}}$$

donc $M\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \Sigma \vec{F_{ext}} - D_m \vec{u}$.

On voit apparaître une force de poussée :

$$\vec{F_{pou}} = -D_m \vec{u} = \vec{\Pi}.$$
$$= +D_M u \vec{e_x}$$

A.N. Ariane 5

$D_m = 250 \text{ kg.s}^{-1}$; $u = 4 \text{ km.s}^{-1}$
$= \rho S u$

$F_{pou} = 10^6$ N.

Dans les cas simples, on peut résoudre l'équation du mouvement.

Exemple : mobile sans frottement.

$M\dfrac{dV}{dt} = D_M u$ (en projection sur $\vec{e_x}$).

Hypothèses : $D_m = cste$ et $u = cste$.

$$\frac{dM}{dt} = -D_m \rightarrow M = M_0 - D_m t$$

$$(M_0 - D_m t)\frac{dv}{dt} = D_m u .$$

$$dv = D_m u \frac{dt}{M_0 - D_m t}$$

En intégrant, $v(t) - v_0 = \left[-u \ln\left(M_0 - D_m t\right)\right]_0^t$.

donc $v(t) = u\left(\ln(M_0) - \ln(M_0 - D_m t)\right)$.

Ainsi, $v(t) = u \ln\left(\frac{M_0}{M_0 - D_m t}\right) = u \ln\left(\frac{M_0}{M(t)}\right)$.

III. Bilans d'énergie cinétique ou mécanique

1. Principe

Théorème de l'énergie cinétique (TEC) : (pour un Σ fermé).

$$d\mathcal{E}_c = \delta W_{ext} + \delta W_{int} .$$

TPC : $$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = P_{ext} + P_{int} .$$

TEM : $$d(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p) = \delta W_{ext_{NC}} + \delta W_{int}$$

TPM : $$\frac{d(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p)}{dt} = P_{ext_{NC}} + P_{int} .$$

On écrira ces théorèmes en se ramenant à un système fermé.

δW_{int} ? P_{int} ? délicat dans un fluide.

↳ forces de viscosité internes
(nulles pour un fluide parfait).

↳ forces de pression.
(nulles pour un écoulement incompressible
car les particules ne se dilatent pas).

2. Puissance d'une pompe.

(cf. FIGURE 6)

Donnée : D_v

On cherche P_{pompe}.

Pour le système fermé : (eau)

t : AB

$$\mathcal{E}_m(t) = \delta m g z_A + \frac{1}{2}\delta m v_A^2 + \mathcal{E}_{m_{com}}(t)$$

$t + dt$: $A'B'$

$$\mathcal{E}_m(t+dt) = \delta m g z_B + \frac{1}{2}\delta m v_B^2 + \mathcal{E}_{m_{com}}(t+dt).$$

$$d\mathcal{E}_m = \delta m g (z_B - z_A) + \frac{1}{2}\delta m (v_B^2 - v_A^2) + \underbrace{\cancel{d\mathcal{E}_{m\,com}}}_{\substack{0 \\ RS}}.$$

donc $$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = D_m\left[gh + \frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2)\right].$$

Puissances :

* P_{pompe}
* Pression parois immobiles → ne W pas, $P = 0$.
  ↳ car $v_{paroi} \perp$ paroi.

* Pression aux extrémités :

$$\delta W_p = p_1 \delta V - p_2 \delta V$$
$$= (p_1 - p_2) \delta V$$

donc $\mathcal{P}_p = (p_1 - p_2) \mathcal{D}_v$.
$= 0$ (car $p_1 = p_2$)

* $\mathcal{P}_{int\ visqueux} < 0$.

Théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \Sigma \mathcal{P}.$$

$$\mathcal{D}_m \left[gh + \frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2) \right] = \mathcal{P}_{pompe} + \mathcal{P}_{int\ visqueux}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{pompe} = \rho \mathcal{D}_v \left[gh + \frac{1}{2}(v_B^2 - \underbrace{v_A^2}_{\substack{\approx 0 \\ \ll v_B^2}}) \right] - \mathcal{P}_{int\ visqueux}$

$$\geq \underbrace{\rho}_{10^3\,kg.m^{-3}} \underbrace{\mathcal{D}_v}_{10\,L.s^{-1}} \left[g\underbrace{h}_{10\,m} + \frac{1}{2}\underbrace{v_B}_{10\,m.s^{-1}}{}^2 \right].$$

A.N.

$\mathcal{P}_{pompe} \geq 1,5$ kW.

3. Signification énergétique de la relation de Bernoulli.

(cf. FIGURE 7)

Hypothèses : écoulement parfait, stationnaire, incompressible.

$$\mathcal{E}_M(t) = \mathcal{E}_{M\,com} + \frac{1}{2}\delta m v_A^2 + \delta m g z_A$$

$$\mathcal{E}_M(t+dt) = \mathcal{E}_{M\,com} + \frac{1}{2}\delta m v_B^2 + \delta m g z_B.$$

$$d\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}\delta m\,(v_B^2 - v_A^2) + \delta m g\,(z_B - z_A)$$

Puissances :

$P_{P,int} = 0$

$$P_{P,ext} = p_A \frac{\delta V_A}{dt} - p_B \frac{\delta V_B}{dt}$$

incompressible $\delta V_A = \delta V_B$.

$$= (p_A - p_B)\frac{\delta V}{dt}$$

TPM avec $\frac{\delta m}{dt} = D_m = \rho D_v$.

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \Sigma P$$

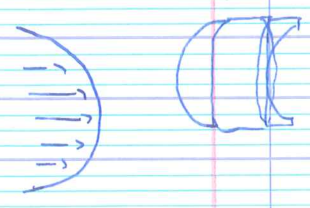
donc $\rho D_v \left[\frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2) + g(z_B - z_A) \right] = (p_A - p_B) D_v$

donc $\left[\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p \right]_A^B = 0$ Bernoulli

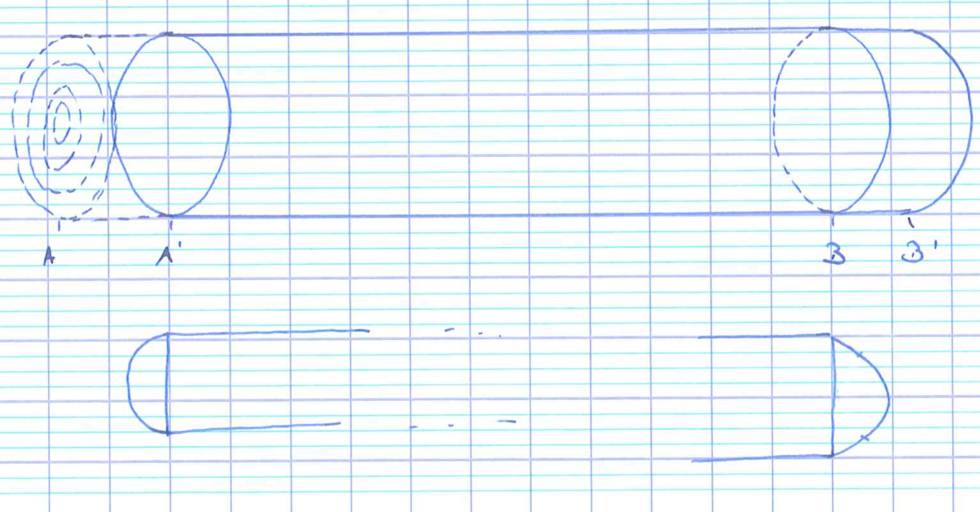
Remarque : La relation de Bernoulli ne s'applique pas si le fluide perd ou gagne de l'énergie. (ex : viscosité)

4. Dissipation d'énergie dans l'écoulement de Poiseuille

profil de vitesse



donc le Σ n'est pas vraiment cylindrique.



Pour le système fermé,

$d\mathcal{E}_c = 0$ (incompressible)

Les particules entrent et sortent à la même vitesse pour une hauteur donnée.

$d\mathcal{E}_p = 0$ (tuyau horizontal).

$$\delta W_p = p_1 \delta V - p_2 \delta V$$
$$= (p_1 - p_2)\delta V.$$

$P_{visc\ paroi} = 0$ (car parois immobiles)

$P_{visc\ int}$?

TPM : $0 = (p_1 - p_2) D_v + P_{visc\ int}$.

$$\frac{d(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p)}{dt} = \text{“}\frac{d\mathcal{E}_m}{dt}\text{”}$$

donc $P_{visc\ int} = -D_v (p_1 - p_2) < 0$.

avec $D_v = G_{Hy} (p_1 - p_2)$

ou $p_1 - p_2 = R_{Hy} D_v$.

$$P_{visc\ int} = -R_{Hy} D_v^2 \sim -RI^2$$
$$= -\frac{(p_1 - p_2)^2}{R_{Hy}} \sim -\frac{U^2}{R}$$

→ Rappelle la formule de l'effet Joule.

L'énergie dissipée devient une énergie thermique.