

CHAPITRE 16 : ÉLECTROSTATIQUE

On étudie des champs électriques, notés \vec{E} , créés par des charges immobiles ou des distributions de charges constantes au fil du temps.

I. Loi de Coulomb et conséquences

1. Loi de Coulomb



M : point cible

q : point source

→

Loi de Coulomb :
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_{qM}}{r_{qM}^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_M}{r_M^3}$$

où ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$$

A.N. atome H $q = e$

L'électron se trouve à $r_M = a_0 = 53 \text{ pm}$

IP subit \vec{E} de norme

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} = 5 \cdot 10^{11} \text{ V.m}^{-1}$$

2. Champ créé par une distribution de charges

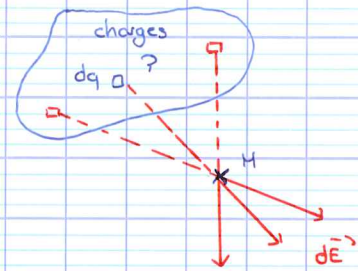
Le champ électrostatique créé par un ensemble de charges est égal à la somme des champs que créerait séparément chacune de ces charges.

Mathématiquement, la relation entre les charges et les champs est linéaire.

$$\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{P_i M}}{r_{iM}^2}$$

Pour une distribution continue,

$$\vec{E}(M) = \int_{\text{sources}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_{PM}}{r^2}$$



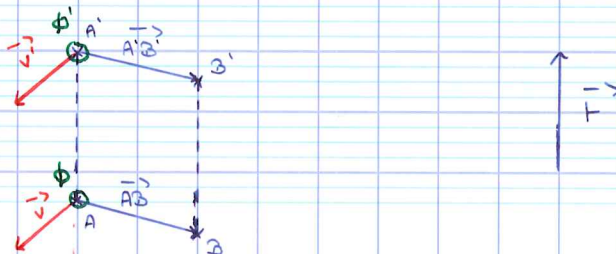
$$\begin{aligned} dq &= \rho(P) dV \\ &= \sigma(P) dS \\ &= \lambda(P) dP \end{aligned}$$

Méthode pénible que le programme évite.

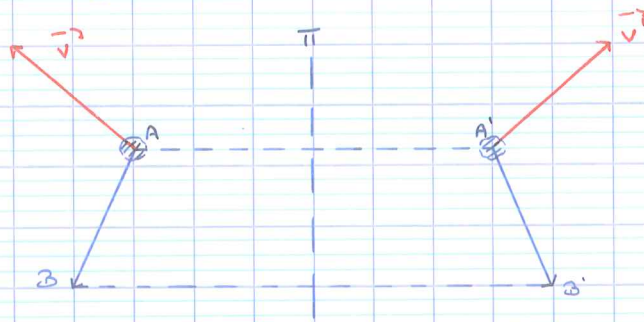
3. Transformation et invariance d'un système physique

Transformation d'un système physique : (cf. encadré)

Exemple : translation de vecteur \vec{T}



Exemple : symétrie plane de plan Π .



Invariance d'un champ par une transformation : (cf. encadré)

4. Invariances des sources et propriétés du champ

A. Invariance par translation

(cf. FIGURE 18)

Théorème : Lorsque les charges sources sont invariantes par translation, le champ électrique est lui-même invariant par translation.

Dans l'exemple de la figure, les charges sont invariantes par toute translation colinéaire à \vec{Oz} donc le champ ne dépend pas de z .

$$\vec{E} \rightarrow \begin{cases} E_x(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) \\ E_z(x, y, z) \end{cases}$$

B. Invariance par rotation autour d'un axe

(cf. FIGURE 19)

Théorème : Si les charges électriques, sources du champ, sont invariantes par rotation, les composantes cylindriques du champ sont elles-mêmes invariantes par rotation.

$$\vec{E} = \begin{cases} E_r (r, \theta, z) \\ E_\theta (r, \theta, z) \\ E_z (r, \theta, z) \end{cases}$$

C. Invariance par symétrie plane

(cf. FIGURE 20)

Théorème : Soient des sources possédant un plan de symétrie Π .

$$(H' = S_\Pi(H))$$

Soit H' le symétrique du point H par rapport au plan Π .

Alors,

$$\vec{E}(H') = S_\Pi(\vec{E}(H))$$

Corollaire : Si $N \in \Pi$, $\vec{E}(N) \subset \Pi$.

D. Anti-invariance par symétrie plane

(cf. FIGURE 21)

On dit qu'il y a anti-invariance par une transformation F quelconque lorsque $F(H') = -F(H)$.

On parle de plan d'anti-symétrie.

Théorème : Soient des sources possédant un plan d'anti-symétrie Π .

Soit H' le symétrique du point H par rapport au plan Π .

Alors,

$$\vec{E}(H') = -S_\Pi(\vec{E}(H))$$

Corollaire : Si $N \in \Pi$, $\vec{E}(N) \perp \Pi$.

Pour trouver un champ à partir de ses sources connues, il faut toujours commencer par analyser les invariances par translation, rotation et symétrie plane.

II. Circulation de \vec{E} et potentiel

1. Potentiel créé par une charge ponctuelle

Soit q une charge ponctuelle en O .

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2} \quad \text{où } r = OM$$

$$= -\vec{\text{grad}} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right)$$

$$\text{donc } \vec{E} = -\vec{\text{grad}} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right)$$

→

$$\text{Ainsi, } \vec{E}(M) = -\vec{\nabla} V(M) \quad (\text{en V.m}^{-1})$$

$$\text{où } V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (\text{en V}).$$

2. Potentiel créé par une distribution de charges

Soit une distribution de charges $\{q_i, r_i\}$.

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i M}$$

$$V(M) = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Exemple : (cf. FIGURE 1)

Le plan $(M; \vec{u}_r; \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie des sources et $M \in \Pi$ donc $\vec{E}(M) \in \Pi$.

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z) \vec{u}_r + E_z(r, \theta, z) \vec{u}_z$$

Il y a invariance par rotation autour de l'axe Oz, donc :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, z) \vec{u}_r + E_z(r, z) \vec{u}_z$$

Si $M_0 \in (O, \vec{u}_z)$, tout plan contenu dans cette droite est plan de symétrie des sources, $\vec{E}(M_0)$ est inclus dans chacun de ces plans, donc $\vec{E}(M_0) = E(O, z) \vec{u}_z = E_0(z) \vec{u}_z$.

$$\begin{aligned} V(M_0) &= \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \int dq \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(M_0) &= -\vec{\nabla} V(M_0) = -\frac{\partial V(M_0)}{\partial z} \vec{u}_z \\ &= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{u}_z \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{u}_z \end{aligned}$$

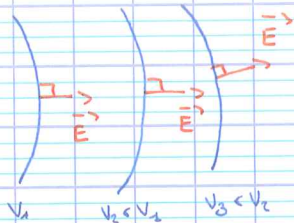
$E(z)$ est impaire, ce qui s'explique que le plan $(O; \vec{u}_x; \vec{u}_y)$, plan de symétrie des charges, $\vec{E}(-z) = S(\vec{E}(z))$.

3. Du potentiel au champ

(cf. FIGURE 2)

$$\vec{E}(M) = -\vec{\nabla}(V(M))$$

* \vec{E} est perpendiculaire aux équipotentiels et dirigé vers les potentiels décroissants.



* $V(M)$ est continue (permet de trouver des constantes d'intégration).

En A, sur la figure, ^{le potentiel} présente un point de selle, donc $\vec{E}(A) = \vec{0}$.

4. Circulation du champ électrique

A. Diminution du potentiel



variation : $V_f - V_i$
diminution : $V_i - V_f$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{P} = \int_A^B -\vec{\nabla}V \cdot d\vec{P} = \int_A^B -dV = -[V]_A^B$$



$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{P} = V(A) - V(B)$$

Cela dépend que de A et B et pas de la courbe P suivie.

C. Cas d'un contour fermé.

Si $A = B$, Γ est une courbe fermée, $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{P} = 0$.

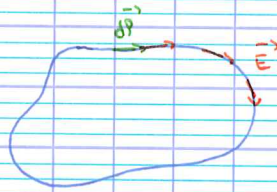
Le champ électrostatique est à circulation conservative.

Conséquence : il n'existe pas de ligne de champ fermée.

Démonstration :

Soit Γ une hypothétique ligne de champ fermée.

$$\vec{E} \cdot d\vec{P} > 0$$

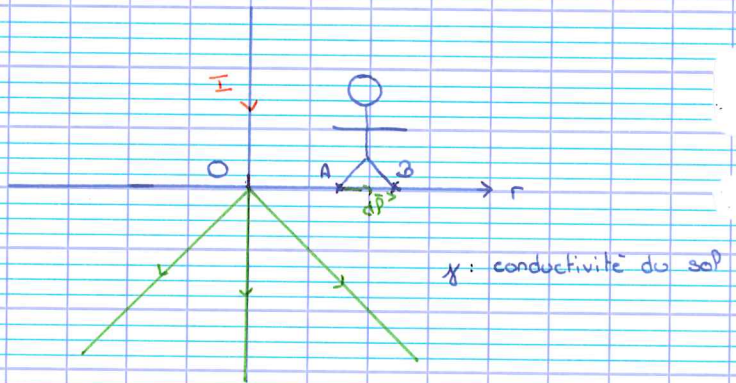


$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{P} > 0 \quad \text{ce qui n'est pas possible (absurde).}$$

Exercice :

$$\vec{J} = \frac{I}{2\pi r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\gamma} = \frac{I}{2\pi \gamma r^2} \vec{u}_r$$



$$\begin{aligned} U &= V(A) - V(B) \\ &= \int_A^B \frac{I}{2\pi \gamma r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{u}_r \\ &= \frac{I}{2\pi \gamma} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \\ &= \frac{I}{2\pi \gamma} \frac{r_B - r_A}{r_A r_B} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } U \approx \frac{I}{2\pi \gamma} \frac{AB}{r^2}$$

Exercice :

Sur une ligne de champ, $\vec{E} \parallel d\vec{P}$.

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{P} = \int_A^B E dP = P_{AB} E_{\text{moy}}.$$

$$V(A) - V(B) = P_{AB} E_{\text{moy}}$$

$$E_{\text{moy}} = \frac{V(A) - V(B)}{P_{AB}}$$

$$\text{A.N. } E_{\text{moy}} = \frac{20}{0,7 \cdot 10^{-2}} = 3 \text{ kV.m}^{-1} \quad (\text{cf. FIGURE 2})$$

Le champ est plus fort là où les équipotentiels sont plus resserrés.

3. Travail de la force électrique

(cf. FIGURE 3)

Preons q plongée dans \vec{E} .

Elle subit $\vec{F} = q\vec{E}$.

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{P} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{P}$$

$$W_{AB} = q(V(A) - V(B)).$$

La force électrostatique est conservative.

$$\text{or } W_{AB} = -\Delta \mathcal{E}_p = -(\mathcal{E}_p(B) - \mathcal{E}_p(A)).$$

$$\text{Ainsi, } \mathcal{E}_p(H) = qV(H).$$

Mouvement de charges dans un champ électrostatique : $\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \text{cste.}$

Exemple : accélérateur d'e-

$$\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \text{cste}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + qV(x) = 0 + 0 \quad (\text{car } v_i = 0)$$

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \quad \text{A l'arrivée, } v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

5. Formulation locale

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{E}) &= -\text{rot}(\text{grad}(V)) \\ &= -\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} V) = \vec{0} \end{aligned}$$

⊖

$$\forall H, \text{rot}(\vec{E}(x)) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Le champ électrique est irrotationnel, il n'existe pas de ligne de champ fermée !

Le champ électrostatique va des charges ⊕ vers les charges ⊖, mais pas de tourbillon !

III. Flux de \vec{E}

1. Flux émis par une charge ponctuelle

(cf. FIGURE 4)

• Flux à travers une sphère de centre O, q : $S = 4\pi r^2$.

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2} \cdot dS \vec{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \times S$$

$$\text{donc } \Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

* Flux à travers une surface Σ contenant q :

$$\begin{aligned} \text{Pour } r \neq 0 \text{ (en dehors de } q), \text{ div}(\vec{E}) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

En dehors de q , E est à flux conservatif.

Par conservation du flux,

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_V \text{div}(\vec{E}) \cdot d\vec{\Phi} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

* si Σ ne contient pas q :

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_V \text{div}(\vec{E}) \cdot d\vec{\Phi} = 0$$

2. Théorème de Gauss

(cf. FIGURE 5)

Théorème : Soit Σ une surface fermée orientée vers l'extérieur.

Soit Q_{int} la somme des charges électriques se trouvant dans le volume limité par Σ . Le flux $\Phi(\vec{E}, \Sigma)$ du champ électrique \vec{E} à travers Σ est donné par

$$\Phi(\vec{E}, \Sigma) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Par linéarité de l'intégration et par le principe de superposition, ce théorème est une conséquence directe de III.1.

3. Calcul du champ par le théorème de Gauss

Méthode : Dans des situations hautement symétriques, on peut prédire la direction de \vec{E} , ne dépendant que d'une seule variable, puis on trouve sa norme par le théorème de Gauss.

Exemple 1 : (cf. FIGURE 6)

Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie des sources, donc $\vec{E}(M) \in (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$.

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z) \vec{u}_r + E_z(r, \theta, z)$$

Et de plus, $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est aussi plan de symétrie des sources donc $\vec{E}(M) \in (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

$$\text{donc } \vec{E}(M) = E_r(r) \vec{u}_r$$

$$\oint_{\mathcal{V}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{dessus}} \vec{E} \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r + \int_{\text{dessous}} \vec{E} \vec{u}_r \cdot (-dS \vec{u}_r) + \int_{\text{côté lat.}} \vec{E} \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r$$

$$= E(r) \int_{\text{côté}} dS$$

$$= E(r) 2\pi r h$$

D'après le théorème de Gauss : $E \times 2\pi r h = \lambda h / \epsilon_0$

$$\text{donc } E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

$$\text{Ainsi, } \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

\vec{E} n'est pas défini pour $r = 0$.

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$$

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + \text{cte}$$

Si il n'y a pas de condition de bord, on peut choisir la constante telle que $V \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$.

Si ce n'est pas possible, on la choisit arbitrairement.

Exemple 2: boule uniformément chargée (cf. FIGURE 7)

Tout plan contenant la droite (M, \vec{u}_r) est plan de symétrie des sources et contient $\vec{E}(M)$.

$$\vec{E} = E(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

D'autre part, il y a invariance par toute rotation autour de O donc θ et φ n'interviennent pas.

Dès lors, $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$.

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = E \times 4\pi r^2$$

* si $r \geq R$: $Q_{\text{int}} = Q$

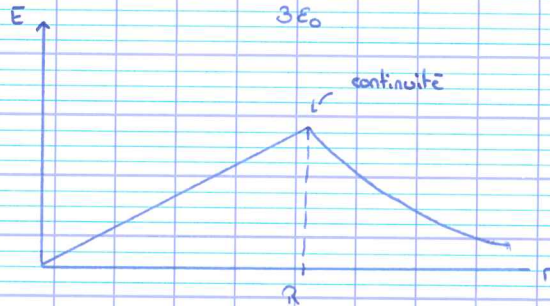
$$\text{Théorème de Gauss: } E \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\text{donc } E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \rho \frac{R^3}{3r^2\epsilon_0}$$

* si $r \leq R$: $Q_{int} = \rho \times \frac{4}{3} \pi r^3$

Théorème de Gauss : $E \times 4\pi r^2 = \rho \times \frac{4\pi r^3}{3\epsilon_0}$

donc $E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$



Là où il n'y a que des charges volumiques, E est continue.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$$

* si $r \geq R$: $V = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} + \mathcal{C}$ $\left\{ \begin{array}{l} r \rightarrow +\infty \\ V \rightarrow 0 \end{array} \right.$

* si $r \leq R$: $V = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \mathcal{D}$

Par la continuité de V :

$$\mathcal{D} = \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 R} =$$

4. Flux et topographie du champ électrique

* Zone neutre : $Q_{int} = 0$

donc $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$

\vec{E} est à flux conservatif.

* Zone positive : $Q_{int} > 0$

donc $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} > 0$



Cela permet de regrouper les charges et leurs signes sur un champ
(cf. FIGURE 8)

5. Equation de Maxwell-Gauss

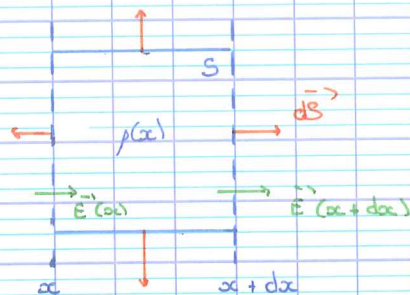
On considère que les charges sont seulement volumiques.

Cas à une dimension :

$$\rho(x) \quad \text{donc} \quad \vec{E} = E(x)\vec{u}_x$$

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} &= E(x+dx)S - E(x)S \\ &= S(E(x+dx) - E(x)) \end{aligned}$$

$$dQ_{int} = S dx \rho(x)$$



Théorème de Gauss :

$$S(E(x+dx) - E(x)) = \frac{S dx \rho}{\epsilon_0}$$

$$\underline{\underline{\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}}$$

Cas à trois dimensions :

Le théorème de Gauss appliqué à une boîte infinitésimale donne :

$$\text{div}(\vec{E}(M)) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

Equation de Maxwell-Gauss



Remarque : Relation locale

On relie \vec{E} à ses sources point par point.

Connaissant ρ on tr. peut trouver \vec{E} .

On peut aussi résoudre le problème à l'invers.

On peut aussi résoudre un problème où \vec{E} et ρ sont inconnus. \Rightarrow nous faut alors une seconde équation.

Quand E est discontinu (charges ponctuelles, linéiques, surfaciques), on ne peut pas appliquer Maxwell-Gauss, \Rightarrow faut revenir au théorème de Gauss.

Exemple 1 : boucle

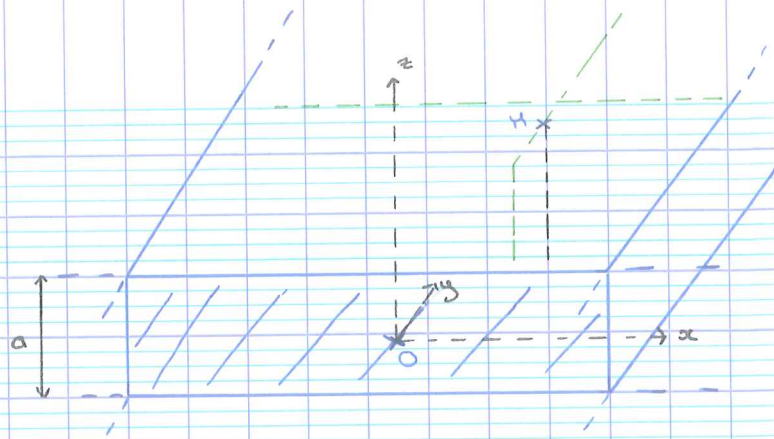
$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E) = \begin{cases} \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{si } r < R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}$$

$$\text{avec } E(0) = 0 \quad \text{et} \quad E(R^-) = E(R^+).$$

Exemple 2 : couche infinie

$(M, \vec{u}_z, \vec{u}_x)$
 et $(M, \vec{u}_z, \vec{u}_y)$
 sont plans de symétrie
 des sources et ils
 contiennent M .

donc $\vec{E}(M) = E(x, y, z) \vec{u}_z$



IP y a invariance par toute translation selon \vec{u}_y et \vec{u}_x .
 donc $\vec{E}(M) = E(z) \vec{u}_z$.

Maxwell-Gauss :

$$\begin{cases}
 a/ \frac{dE}{dz} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{si } z \in]-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}[\\
 b/ \frac{dE}{dz} = 0 & \text{si } z \in]-\infty; -\frac{a}{2}[\\
 c/ \frac{dE}{dz} = 0 & \text{si } z \in]\frac{a}{2}; +\infty[
 \end{cases}$$

a/ $E = \frac{\rho}{\epsilon_0} z + C$

$(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ est plan de symétrie des sources

Pour $z = 0$, $\vec{E} \in (\vec{u}_x, \vec{u}_y)$

or $\vec{E} \perp (\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ car $\vec{E} = E(z) \vec{u}_z$

donc $E(0) = 0$.

donc $C = 0$

Autre version :

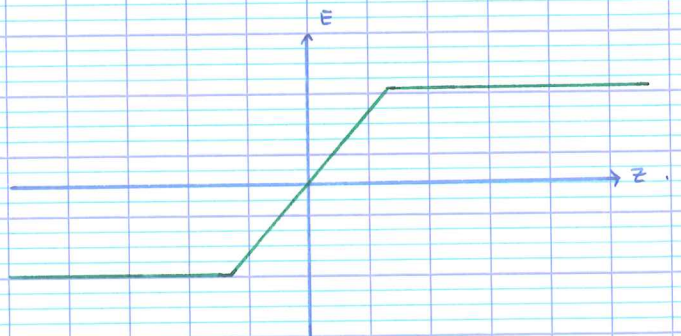
$\vec{E}(M) = S(\vec{E}(M))$

$E(z) = -E(z)$

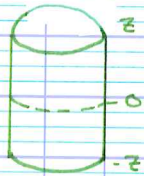
donc $E(0) = 0$.

b/ $E = D = E(-\frac{a}{2}) = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0}$

c/ $E = \frac{\rho a}{2\epsilon_0}$



On peut aussi directement utiliser le théorème de Gauss sur une surface fermée de cette forme :



6. Equations de Poisson et de Laplace

$$\vec{E} = -\text{grad}(V)$$

Maxwell-Gauss : $\text{div}(-\text{grad}(V)) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

→

$$\text{Loi de Poisson : } \Delta V(\text{M}) + \frac{\rho(\text{M})}{\epsilon_0} = 0$$

Zone neutre : $\text{div}(\vec{E}) = 0$

→

$$\text{Loi de Laplace : } \Delta V = 0$$

Elles s'utilisent comme Maxwell-Gauss, ce sont des équations locales. Bien adaptées à des méthodes numériques.

Exemple : boule métallique plongée dans un champ (cf. FIGURE 9)

Plongées dans \vec{E}_0 , les charges se déplacent dans la boule, ce qui modifie le champ autour.

On cherche \vec{E} pour $r > R$ et ses charges.

Admis : dans le métal à l'équilibre, $\vec{E} = \vec{0}$ et V uniforme

On résout $\Delta V = 0$ avec des conditions de bord.

$$\begin{cases} \text{si } r \rightarrow R^+, & V \rightarrow 0 \\ \text{si } r \rightarrow +\infty, & \vec{E} \rightarrow \vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_z \\ & \text{i.e. } V \sim -E_0 z = -E_0 r \cos(\theta) \end{cases}$$

On utilise une base de fonctions harmoniques (i.e. à Laplacien nul).

$$V(r, \theta, \varphi) = \sum_{p=0}^{\infty} [A_p r^p + B_p r^{-(p+1)}] P_p(\cos(\theta)).$$

P_p : polynômes de Legendre

$$* r \rightarrow +\infty : A_0 r^0 + A_1 r^1 \cos(\theta) + A_2 r^2 P_2(\cos(\theta)) + \dots \sim -E_0 r \cos(\theta)$$

$$\text{donc } A_2 = A_3 = \dots = 0$$

$$A_1 = -E_0$$

$$A_0 = 0 \quad \text{C'admis, c'est une constante, a priori elle peut prendre n'importe quelle valeur.}$$

$$* r \rightarrow R^+ : \forall p \in \mathbb{N}, A_p R^p + B_p R^{-(p+1)} = 0$$

$$\text{or pour } p \neq 1, A_p = 0 \text{ donc } B_p = 0$$

$$\text{et pour } p = 1, -E_0 R + B_1 R^{-2} = 0$$

$$\text{donc } B_1 = E_0 R^3.$$

$$\text{Finalement, } V = \left(-E_0 R + \frac{E_0 R^3}{r^2} \right) \cos(\theta)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$$

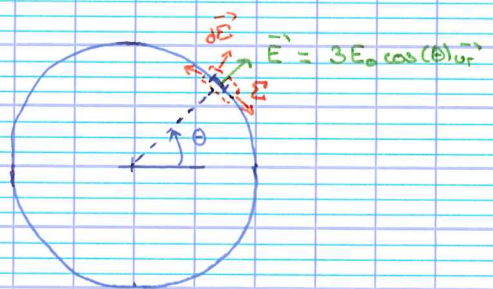
$$= -E_0 \cos(\theta) \left(-1 - \frac{2}{r^3} R^3 \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} E_0 \left(\frac{R^3}{r^2} - r \right) \sin(\theta) \vec{u}_\theta$$

$$\vec{E} = E_0 \cos(\theta) \left(\frac{2R^3}{r^3} + 1 \right) \vec{u}_r + E_0 \sin(\theta) \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right) \vec{u}_\theta$$

Recherche des charges surfaciques :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = 3E_0 \cos(\theta) dS$$

$$\Sigma dQ_{int} = \sigma dS$$



D'après le théorème de Gauss :

$$3E_0 \cos(\theta) dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}$$

$$\text{Ainsi, } \sigma = 3E_0 \epsilon_0 \cos(\theta).$$

La boule se polarise.

IV. Propriétés des dipôles électriques

1. Définition

On appelle dipôle un ensemble de charges globalement neutre où les charges positives et négatives ont des barycentres distincts.

Cas académique :

A_-	A_+
\ominus	\oplus
$-q$	$+q$

Cas compliqué :





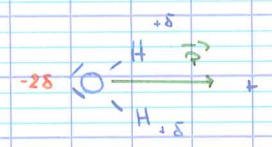
On note \vec{p} le moment dipolaire défini par :

$$\vec{p} = qA \cdot \vec{A}_i \quad (\text{en C.m})$$

Aussi, $\vec{p} = \sum_i q_i \cdot \vec{OH}_i$ $\sum_i q_i = 0$ (car globalement neutre)

2. Moment dipolaire des molécules

Une molécule polaire est une molécule de moment dipolaire non nul.



$p = \dots \cdot 10^{-30} \text{ C.m}$



$p = \dots \cdot 10^{-30} \text{ C.m}^{-1}$

D'autres molécules acquiert p sous l'influence d'un champ électrique, ce sont des molécules polarisables.

$$\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E} \quad \text{ou} \quad \vec{p} = 4\pi\epsilon_0 \alpha \vec{E}$$

$$[\alpha] = \frac{[p]}{[4\pi\epsilon_0 E]} = \frac{[Q]L}{[4\pi\epsilon_0 E]} = \frac{[Q]L}{[CQ]/L^2} = L^3 \quad (E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2})$$

Ainsi, $[\alpha] = \text{volume}$
 α : polarisabilité de volume

En général, les grosses molécules sont davantage polarisables

Odg : $\text{CCl}_4 \quad \alpha = 10 \cdot 10^{-20} \text{ C.m}$

Pour comprendre le phénomène, il faudrait comprendre la déformation des OH lorsque \vec{E} s'applique.
 Etudions plutôt un modèle simplifié.

Modèle de Thomson - Doms : (cf. FIGURE 13)

Sous l'effet de \vec{E}_0 , les électrons sont tirés vers la gauche.
Les électrons et les protons créent un champ \vec{E}' .

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_{\text{proton}} + \vec{E}_e \\ &= \frac{\rho A_+ \vec{H}}{3\epsilon_0} - \frac{\rho A_- \vec{H}}{3\epsilon_0} \\ &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{A}_+ \vec{A}_- = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3 \times 3\epsilon_0} \vec{A}_+ \vec{A}_-\end{aligned}$$

$$\text{donc } \vec{E} = \frac{Q}{4\pi R^3 \epsilon_0} \vec{A}_+ \vec{A}_-$$

A l'équilibre, $\vec{E} + \vec{E}_0 = \vec{0}$

$$\text{donc } \underbrace{Q A_+ A_-}_{\vec{p}} = 4\pi R^3 \epsilon_0 \vec{E}_0$$

On identifie $\alpha = R^3$.

3. Potentiel et champ créés par un dipôle électrostatique (cf. FIGURE 14)

Approximation dipolaire : $a \ll$ toute autre longueur.

Ici, $a \ll r = OM$

Les invariances et symétries montrent que :

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{u}_\theta$$

On ne peut pas déterminer commodément \vec{E} avec le théorème de Gauss.

On procède par superposition.

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 A_+M} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 A_-M}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{A_+M} - \frac{1}{A_-M} \right)$$

$$\vec{A}_+M = \vec{A}_+O + \vec{OM}$$

$$A_+M^2 = A_+O^2 + OM^2 + 2\vec{A}_+O \cdot \vec{OM}$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 + 2\left(-\frac{a}{2}r\cos(\theta)\right)$$

$$= r^2 \left[1 - \frac{a}{r}\cos(\theta) + \frac{a^2}{4r^2} \right]$$

$$\frac{1}{A_+M} = \left(r^2 \left[1 - \frac{a}{r}\cos(\theta) + \frac{a^2}{4r^2} \right] \right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{2r}\cos(\theta) + o\left(\frac{a}{r}\right) \right)$$

De même, $\frac{1}{A_-M} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{2r}\cos(\theta) + o\left(\frac{a}{r}\right) \right)$

Alors, $V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{a}{r}\cos(\theta) \right)$

$$= \frac{p\cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



Ainsi, $V(M) = \frac{p\cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V)$$

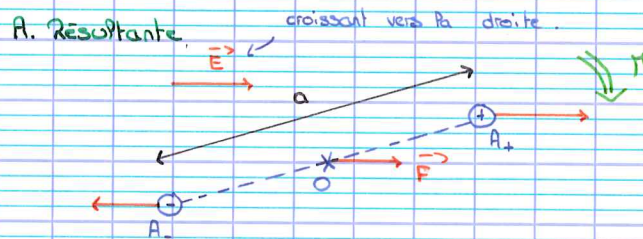
$$= -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(2\cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta \right)$$

Lignes de champs et équipotentielles dipolaires. (cf. FIGURE 11)

Attention, l'affaire est fautive tout près du dipôle. (cf. FIGURE 12)
(pas de boucles!)

4. Actions subies par un dipôle plongé dans un champ extérieur



$$\vec{F} = q\vec{E}(A_+) - q\vec{E}(A_-)$$

$$= q(\vec{E}(A_+) - \vec{E}(A_-))$$

Si \vec{E} est uniforme, $\vec{F} = \vec{0}$.

Sinon, \vec{E} varie légèrement (car $a \ll$ longueur de variation de E).

$$F_x = q(E_x(A_+) - E_x(A_-))$$

$$= qdE_x$$

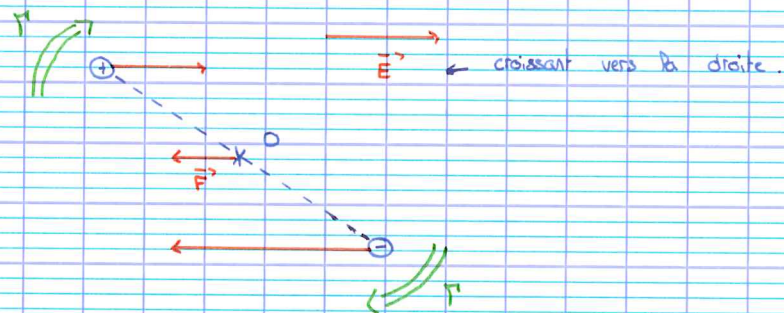
$$= q\vec{\nabla}E_x \cdot \vec{A.A}_+$$

$$= \vec{p} \cdot \vec{\nabla}E_x$$

$$\begin{cases} F_x = \vec{p} \cdot \vec{\nabla}E_x \\ F_y = \vec{p} \cdot \vec{\nabla}E_y \\ F_z = \vec{p} \cdot \vec{\nabla}E_z \end{cases}$$



Ainsi, $\vec{p} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$



Le sens de la force dépend de l'orientation de \vec{p} .

B. Moment (couple)

$$\vec{\Gamma}_0 = \vec{OA}_+ \wedge q\vec{E}(A_+) - \vec{OA}_- \wedge q\vec{E}(A_-)$$

$$\vec{OA}_+ = \frac{\vec{A-A}_+}{2} = -\vec{OA}_-$$

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_0 &= \frac{\vec{A-A}_+}{2} \wedge q\vec{E}(A_+) + \frac{\vec{A-A}_+}{2} \wedge q\vec{E}(A_-) \\ &= \vec{p} \wedge \left(\frac{\vec{E}(A_+) + \vec{E}(A_-)}{2} \right) \end{aligned}$$



$$\text{Ainsi, } \vec{\Gamma}_0 \approx \vec{p} \wedge \vec{E}(O)$$

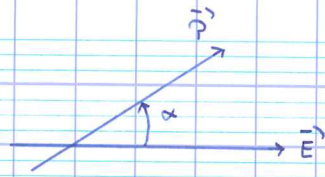
Ce couple fait tourner le dipôle pour l'orienter sur \vec{E} .
 A l'équilibre stable, \vec{p} est parallèle à \vec{E} et de même sens.

C. Energie potentielle

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p &= qV(A_+) - qV(A_-) \\ &= q(V(A_+) - V(A_-)) \\ &= q\vec{\nabla}V \cdot \vec{A-A}_+ \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}(O)$$

Ceci est valable pour un dipôle rigide (= non déformable), comme une molécule polaire, mais pas pour un dipôle qui se déforme sous l'effet d'un champ, comme une molécule polarisable.



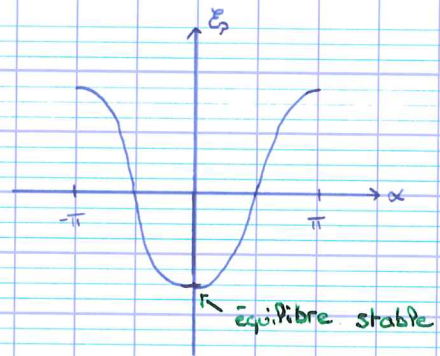
$$\mathcal{E}_p = -pE \cos(\alpha)$$

Si $\alpha = 0$, $\mathcal{E}_p = -pE(1)$.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \mathcal{E}_p$$

La force \vec{F} est dirigée vers les \mathcal{E}_p décroissantes donc vers les champs croissants.

Cela corrobore les dessins de A.



5. Interaction ion-dipôle

(cf. FIGURE 14) (en rose)

\vec{p} s'aligne sur le champ créé par q

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^2}$$

$$\vec{p} = p \vec{u}_r$$

Si $Q > 0$, $p > 0$

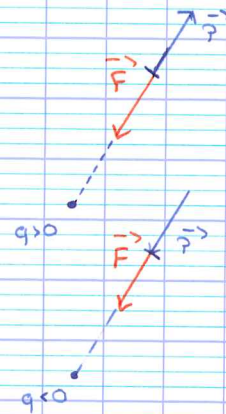
$Q < 0$, $p < 0$

\vec{p} subit :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \\ &= p \frac{d}{dr} \vec{E} \end{aligned}$$

donc $\vec{F} = -\frac{2pQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r^3}$

Comme $pQ > 0$, \vec{F} est une force attractive.



Un ion attire ainsi les molécules d'un solvant polaire, il est solvate.

6. Interactions dipôle-dipôle

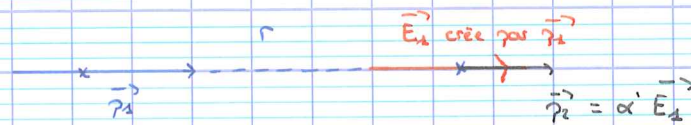
Ce sont des interactions de Van der Waals :

- Keesom : polaire / polaire
 - Debye : polaire / polarisable
 - London : polarisable / polarisable
- $$\left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} \mathcal{E}_p \sim \frac{1}{r^6}$$

Le champ créé par un dipôle est en $\frac{1}{r^3}$.

$\mathcal{E}_p \sim \frac{1}{r^6}$ est donc étonnant.

A. Debye



$$\vec{E}_1 = \frac{2p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r \quad (\text{cf. 2. avec } \theta = 0)$$

$$\vec{F}_2 = (\vec{p}_2 \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_1 = p_2 \frac{\partial}{\partial r} \vec{E}_1$$

$$= \frac{2p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{(-3)}{r^4} \vec{u}_r$$

$$= -\frac{3\alpha' p_1^2}{4(\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{r^7} \vec{u}_r$$

$$\text{donc } \mathcal{E}_p \sim \frac{1}{r^6}$$

$$\text{En effet, } \mathcal{E}_p = \frac{3\alpha' p_1^2}{4(\pi\epsilon_0)^2} \left(\frac{-1}{6r^6} \right) = -\frac{1}{8} \frac{\alpha' p_1^2}{(\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{r^6}$$

La formule $\mathcal{E}_p = \vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1$ donne $\mathcal{E}_p = -\alpha' E_1^2 \rightarrow$ facteur $\frac{1}{4}$.

Attention ! On avait précisé que cette formule ne s'applique que pour les dipôles rigides, ce que n'est pas p_2 .

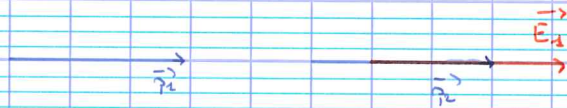
Remarque : $\vec{F} = (\vec{r}_2 \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_1$
 $= (\alpha' \vec{E}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_1$
 $= \alpha' \left(\frac{1}{2} \vec{\nabla} E_1^2 - \vec{E}_1 \wedge \underbrace{\vec{\text{rot}}(\vec{E}_1)}_{=\vec{0}} \right)$ (car pas de boucle)
 $= -\vec{\nabla} \left(\underbrace{-\frac{\alpha'}{2} E_1^2}_{\mathcal{E}_p} \right)$

B. Keesom

$$\mathcal{E}_p = -\vec{r}_2 \cdot \vec{E}_1 \quad \text{OK.}$$

(ici $\vec{r}_2 = \text{cte}$ car la molécule est polaire).

$$\mathcal{E}_p \sim \frac{1}{r^2}$$



$$\mathcal{E}_p < 0.$$

Par agitation thermique, \vec{r}_2 peut changer de direction et subir des interactions attractives ou répulsives qui se compensent partiellement.

A étudier en utilisant le facteur de Boltzmann :

$$P(\text{état}) \propto e^{-\mathcal{E}/k_B T} \quad (\text{distribution de Boltzmann})$$

$$\mathcal{E}_p = -\vec{r}_2 \cdot \vec{E}_1$$

C. London

Effet quantique : les électrons bougent en permanence, ce qui donne un dipôle instantané.

V. Condensateur plan

1. Modélisation et calcul du champ

(cf. FIGURE 15)

Deux plaques de métal face à face admettant des charges opposées.

On néglige les effets de bord...

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

D'après le cours : $0 = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0}$ donc $Q_2 = -Q_1$.

On considère une seule plaque puis on appliquera le principe de superposition. (cf. FIGURE 16)

* Calcul de \vec{E} :

Les plans $(\mathcal{M}; \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et $(\mathcal{M}; \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ sont plans de symétrie des sources.

Alors, $\vec{E} = E(x, y, z) \vec{u}_x$

On prend un cylindre dont la section passe par \mathcal{M} et dont les génératrices sont perpendiculaires au plan.

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{\mathcal{S}} &= E(x)dt + 0 + E(-x)dt (-\vec{u}_x) \\ &= E(x)dt - E(x)dt \quad (\text{car symétrie}) \\ &= 2E(x)dt \end{aligned}$$

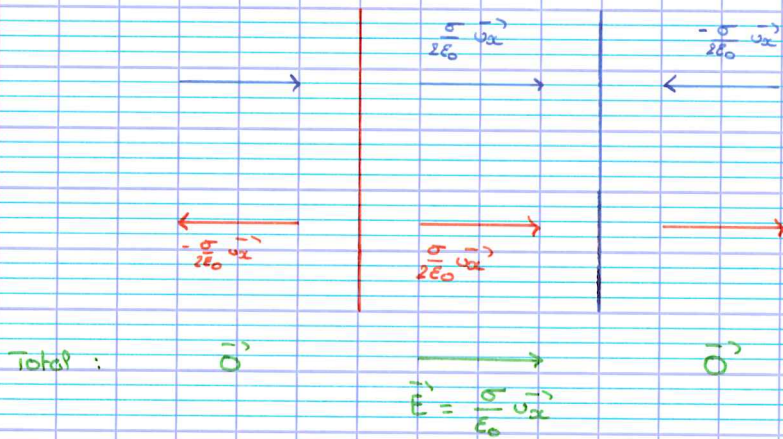
$$Q_{\text{int}} = \sigma dt$$

$$\text{Théorème de Gauss : } 2E(x)dt = \frac{\sigma dt}{\epsilon_0}$$

$$\text{donc } E(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x \quad \text{à droite}$$

$$E(x) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x \quad \text{à gauche.}$$

On superpose les champs créés par les deux côtés.



2. Capacité du condensateur plan

$$Q = CU$$

$$U = V(x_1) - V(x_2)$$

$$= \int_{x_2}^{x_1} \vec{E} \cdot d\vec{P}$$

$$= \int_{x_2}^{x_1} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x \cdot d\vec{P}_{u_x}$$

$$= \frac{\sigma}{\epsilon_0} e = \frac{Q}{S \epsilon_0} e$$

en F en F.m⁻¹

$$Q = \frac{S \epsilon_0}{e} U$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

A.N. $S = 1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$

$e = 1 \text{ mm}$

$C = 9 \cdot 10^{-3} \text{ F}$

Pour augmenter C , on peut :

- prendre une plus grande surface et on l'enroule.
- prendre un isolant (un diélectrique) pour remplacer l'air $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon \gg \epsilon_0$.
- $e \downarrow$, $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{U}{e} \uparrow$ (Attention au risque de charge du condensateur).

$\hookrightarrow E_{\text{diélectrique (air)}} = 30 \text{ kV/cm}$

3. Énergie du condensateur plan

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Démonstration :

~~$$\mathcal{E}_p = QV(\mathcal{M}_1) - QV(\mathcal{M}_2) = QU$$~~

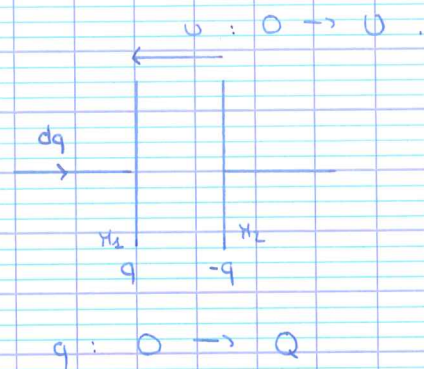
⚠ $\mathcal{E}_p = QV_{\text{tot}}$ variable que les charges sont plongées dans un champ extérieur.
ici, les charges créent un champ elles-mêmes.

On charge peu à peu le condensateur.

Pour dq , on a :

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_p &= dqV(\mathcal{M}_1) - dqV(\mathcal{M}_2) \\ &= dqU \\ &= Cdu \end{aligned}$$

donc $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} CU^2$.



II. Encore deux thèmes en vrac

1. Énergie électrostatique

(cf. FIGURE 17)

On cherche l'énergie d'une boule chargée, de charge Q et de rayon R .

Par une voie de l'esprit, on la forme peu à peu.

$$q : 0 \rightarrow Q$$

$$r : 0 \rightarrow R$$

Quand on amène dq , $d\mathcal{E}_p = dq \underbrace{V(r)}_{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}} - 0$ (potentiel nul à l'infini)
(cf. II.3.)

$$Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

$$q = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

$$\frac{q}{Q} = \frac{r^3}{R^3} \quad \text{donc} \quad r = R \frac{q^{1/3}}{Q^{1/3}}$$

$$\text{donc} \quad dE_p = dq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$= dq \frac{q^{2/3}}{4\pi\epsilon_0 R} Q^{1/3}$$

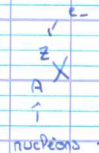
$$E_p = \int_{q=0}^Q dE_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \left[\frac{3}{5} q^{5/3} \right]_0^Q Q^{1/3}$$

→

$$\text{Ainsi, } E_p = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

Dans un noyau atomique, on a ce genre d'énergie sous la forme :

$$E = a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad a_c = 0,7 \text{ MeV}$$



Noyau : Volume $\propto R^3 \propto A$

$$R \propto A^{1/3}$$

$$R = r_0 A^{1/3}$$

$$\uparrow \\ 1,2 \text{ fm} = 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

$$Q = Ze$$

$$E_p = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{Z^2 e^2}{r_0 A^{1/3}} \quad \text{donc} \quad a_c = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 r_0}$$

$$\text{A.N. } a_c = 0,8 \text{ MeV}$$

2. Analogies concernant le champ gravitationnel
(cf. TABLE).

