

## CHAPITRE 18 : ELECTROMAGNETISME DEPENDANT DU TEMPS

### I. Equations de Maxwell

#### 1. Equation de Maxwell - Faraday

A. Un rappel utile

(cf. FIGURE 1 - gauche)

$U = R i$  est l'expression de  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

champ causé par le générateur qui agit sur les porteurs

$$U = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{P}$$

B. Loi de Faraday et induction de Neumann

(cf. FIGURE 1 - milieu)

Quand le flux de  $\vec{B}$  varie, tout se passe comme si il y avait un générateur dont voilà la fem :



$$e = - \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{Loi de Faraday})$$

Il existe donc dans le fil un champ électrique qui pousse les porteurs selon la loi d'Ohm.

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{et} \quad e = \oint_e \vec{E} \cdot d\vec{P}$$

$$\text{D'où la loi de Faraday : } e = \oint_e \vec{E} \cdot d\vec{P} = -\frac{d\phi}{dt}$$

Ce champ n'est pas à circulation conservative, contrairement en électrostatique. De plus,  $\text{rot}(\vec{E}) \neq \vec{0}$ .

### C. Expression locale de la loi de Faraday

(cf. FIGURE 1 - droite)

La courbe est immatérielle mais  $\vec{E}$  existe quand même.

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{P} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{P} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M, t) \cdot d\vec{S}$$

Stokes  $\left\{ \int_S \text{rot}(\vec{E}) \cdot d\vec{S} = \int_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M, t) \cdot d\vec{S} \right.$

La relation a lieu pour toute surface  $S$  :

Ainsi, on en déduit l'Equation de Maxwell-Faraday :

$$\forall M, \forall t, \quad \text{rot}(\vec{E})(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(M, t)$$

Les sources qui créent un champ magnétique dépendant du temps créent aussi un champ électrique rotationnel.



## 2. Equation de Maxwell - Ampère

En magnéto-statique,  $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$ .

En régime variable, cette équation est généralement fautive.

### A. Nécessité de changer l'équation

(cf. FIGURE 2)

$$\vec{I} = -\frac{dQ}{dt} = 4\pi r^2 j(r, t)$$

Ces courants ne sont pas à flux conservatif.

Tout plan qui contient OH est plan de symétrie des sources.  
Donc  $\vec{B}$  est  $\perp$  à tous ces plans, il est donc nul.

$$\begin{aligned} \vec{B}(x, t) &= \vec{0} \\ \text{donc } \text{rot}(\vec{B}) &= \vec{0} \\ \text{mais } \vec{j}(x, t) &\neq \vec{0} \end{aligned}$$

L'équation de la magnéto-statique est violée.

### B. Courant de déplacement

En régime variable l'Equation de Maxwell - Ampère s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{B}(x, t)) &= \mu_0 (\vec{j}(x, t) + \vec{j}_d(x, t)) \\ \text{où } \vec{j}_d(x, t) &= \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(x, t)}{\partial t} \\ &\text{courant de déplacement} \end{aligned}$$

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

L'équation de Maxwell-Ampère est compatible avec l'équation de conservation de la charge.

On prend la divergence membre à membre.

$$\underbrace{\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{B}))}_{=0 \text{ (analyse vectorielle)}} = \mu_0 \left( \operatorname{div}(\vec{j}) + \epsilon_0 \operatorname{div}\left(\frac{\delta \vec{E}}{\delta t}\right) \right)$$

$$\text{donc } \operatorname{div}(\vec{j}) + \epsilon_0 \frac{\delta}{\delta t} \underbrace{\operatorname{div}(\vec{E})}_{= \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ (Maxwell-Gauss)}} = 0$$

Ainsi, on retrouve l'équation de conservation de la charge :

→

$$\operatorname{div}(\vec{j}) + \frac{\delta \rho}{\delta t} = 0$$

Retour sur I.2.a.

$$\vec{E} = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\delta \vec{E}}{\delta t} = \frac{dQ/dt}{4\pi r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{j} + \vec{j}_D = \frac{-dQ/dt}{4\pi r^2} \vec{u}_r + \frac{dQ/dt}{4\pi r^2} \vec{u}_r = \vec{0}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D) \text{ est vérifiée.}$$

En régime variable, il faut modifier le théorème d'Ampère.

→

**Théorème d'Ampère :**

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{P} = \mu_0 (\overline{I}_{\text{enl}} + \overline{I}_{\text{D enl}})$$

$$\text{où } \overline{I}_{\text{D enl}} = \int_{S} \vec{j}_D \cdot d\vec{S}$$



### 3. Récapitulation

(cf. TABLE 1)

L'électromagnétisme repose sur 4 équations.

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont couplés, il faut les calculer ensemble par leur variation temporelle.

Ces équations sont linéaires, on peut appliquer le principe de superposition.

Les théorèmes sur les plans de symétries s'appliquent à condition de considérer les sources constituées des charges et des courants ensemble.

## II. Régimes quasi-stationnaires

### 1. Les régimes statiques

Dès lors,  $\frac{\partial X}{\partial t} = 0$   
Ce qui nous donne :

MG :	$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	}	ELECTROSTATIQUE
MF :	$\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$		
MA :	$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{J}$	}	MAGNETOSTATIQUE
MD :	$\text{div}(\vec{B}) = 0$		

En régime statique,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont découplés.

## 2. ARQS magnétique

### A. Exemple

(cf. FIGURE 3)

On envisage un régime variable avec des courants périodiques  
où  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

$$\vec{B}_0 = \mu_0 n I(t) \vec{u}_z$$

Ce résultat de magnéto-statique est une approximation valable si  $\omega \rightarrow 0$ .  
Connaissant  $\vec{B}$ , cherchons  $\vec{E}$ .

( $\vec{u}_r, \vec{e}_r, \vec{e}_z$ ) est un plan d'antisymétrie des courants sources  
donc  $\vec{E} \perp$  à ce plan.

$$\text{donc } \vec{E} = E(r, t) \vec{u}_\theta \quad \text{et } E(0) = 0.$$

$$\text{Sur } \Gamma, \oint \vec{E} \cdot d\vec{P} = E(r) \times 2\pi r.$$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_0 S = B_0 4\pi r^2.$$

$$\text{D'après Faraday, } 2\pi r E = -\dot{B}_0 \pi r^2.$$

$$I = I_0 \cos(\omega t)$$

$$E_1 \propto \omega^2$$

$$\text{donc } E_1 = -\frac{r}{2} \dot{B}_0 = -\frac{r}{2} \mu_0 n \dot{I}$$

A cause de  $E_1$ ,  $j_D \neq 0$ ,  $B_0$  était donc approximatif.

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_2 + o(\omega^2).$$

$$\text{rot}(\vec{B}_0 + \vec{B}_2) = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\delta \vec{E}_1}{\delta t})$$

$$\text{rot}(\vec{B}_2) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\delta \vec{E}_1}{\delta t}$$



$$\text{ou } \oint_{\mathcal{C}} \vec{B}_2 \cdot d\vec{P} = \mu_0 \vec{I}_{2, \text{en } P} \quad \text{avec } \vec{B}_2 = B_2(r) \vec{u}_z$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \vec{B}_2 \cdot d\vec{P} &= P B_2(r, t) \\ \vec{I}_{2, \text{en } P} &= \int_{\mathcal{S}} \epsilon_0 \frac{\delta \vec{E}_1}{\delta t} \cdot d\vec{S} \\ &= \epsilon_0 \int_0^r \frac{r'}{2} \ddot{B}_0 P dr' \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \ddot{B}_0 \frac{r^2}{2} P \end{aligned}$$

$$\text{D'après Ampère, } P B_2 = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{4} r^2 P \ddot{B}_0$$

$$\text{donc } B_2 = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{4} r^2 \ddot{B}_0 = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{4} r^2 \mu_0 n \ddot{I} \ll \omega^2$$

L'approximation magnétostatique est légitime si  $|B_2| \ll |B_0|$ .

$$\text{or } |B_2| \approx \frac{\mu_0 \epsilon_0}{4} r^2 \omega^2 |B_0|$$

$$\frac{|B_2|}{|B_0|} \approx \frac{\mu_0 \epsilon_0}{4} r^2 \omega^2 \ll \frac{\mu_0 \epsilon_0 a^2 \omega^2}{4} = \frac{a^2 \omega^2}{4c^2}$$

L'approximation est valide variable si :

Aparté :  $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$   
vitesse de la lumière

$$a^2 \omega^2 \ll 4c^2$$

$$a \frac{2\pi}{T} \ll 2c$$

$$a \ll cT$$

$$\text{ie. } f = \frac{1}{T} \ll \frac{c}{a}$$

$$\text{A.N. } a = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

$$f \ll 10 \text{ GHz}$$

### 3. Généralisation

(cf. encadré ARQS Magnétique)

L'ARQS magnétique est le cadre d'étude de l'induction.

L'ARQS magnétique néglige  $\vec{j}_0$  (ou  $I_0$ ).

### C. Un raisonnement populaire

$$\text{MA : } \text{rot}(\vec{z}) = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_0)$$

ARQS (néglige)

div

$$0 = \mu_0 \text{div}(\vec{j})$$

donc  $\text{div}(\vec{j}) = 0 \rightarrow$  Loi des noeuds.

Ce raisonnement est mathématique. ( $\text{div}(\vec{j}_0)$  n'est pas forcément négligeable).

### 3. ARQS électrique

#### A. Exemple

(cf. FIGURE 4)

$$\vec{E} = - \underbrace{\frac{\sigma}{\epsilon_0}}_{\text{noté } E_0} \vec{u}_z$$

En régime variable, appliquer ce résultat d'électrostatique est approximatif. (correct si  $\omega \rightarrow 0$ )

Calcul de  $\vec{z}$  : (par Maxwell-Ampère).

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{z} &= \mu_0 \vec{j}_0 \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\delta E}{\delta t} \end{aligned}$$

(entre les plaques,  $\vec{j} = \vec{0}$ )  
il n'y a pas de courant électrique.



$(x, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie des sources.  
 $\vec{B}$  Po. est  $\perp$ .

donc  $\vec{B} = B(r, z) \vec{u}_\theta$

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{P} = \mu_0 I_{\text{enP}}$  (théorème d'Ampère)

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{P} = 2\pi r B$

$I_{\text{enP}} = \int \vec{j}_a \cdot d\vec{S}$   
 $= \int \epsilon_0 \dot{E}_0 \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z$   
 $= \epsilon_0 \dot{E}_0 \pi r^2$

donc  $2\pi r B = \mu_0 \epsilon_0 \dot{E}_0 \pi r^2$

$B_1 = \frac{1}{2c^2} r \dot{E}_0 \omega^1$

$B_1$  dépend du temps, on corrige  $E$

$E = E_0 + E_2 + o(\omega^2)$

$\text{rot } \vec{E}_2 = - \frac{\delta \phi_2}{\delta t}$

ou  $\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{P} = - \frac{d\phi_2}{dt}$

$\vec{E}_2 = E_2 \vec{u}_z$

$\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{P} = E_2 h$

$\phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot (-dS) \vec{u}_\theta$

$= \int_0^r \frac{r'}{2c^2} \dot{E}_0 \vec{u}_\theta \cdot (-h dr') \vec{u}_\theta$

$= - \frac{\dot{E}_0 h}{2c^2} \frac{r^2}{2}$

$$\text{MF} : E_2 h = \frac{r^2 h \dot{E}_0}{4c^2}$$

$$\text{donc } E_2 = \frac{r^2 \dot{E}_0}{4c^2} \propto \omega^2$$

$$|E_2| \ll |E_0| \quad \text{si} \quad \frac{r^2 \omega^2}{4c^2} \ll 1$$

$$\frac{d^2 \omega^2}{4c^2} \ll 1$$

$$\underline{\underline{d \ll cT}}$$

### B. Généralisation

(cf. encadré ARQS électrique)

L'ARQS électrique est d'un usage rare.

## III. Énergie électromagnétique

### 1. Deux exemples simples de localisation de l'énergie électromagnétique

#### A. Localisation de l'énergie dans un condensateur plan

(cf. FIGURE 4)

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad C = \epsilon_0 \frac{S}{e}$$

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 S} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \quad \text{donc } Q = S \epsilon_0 E$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{(S \epsilon_0 E)^2}{\epsilon_0 S / e}$$

$$= \underbrace{S e}_{\text{volume où régit le champ}} \times \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$



On pose  $u_e$  la densité volumique d'énergie électrique :

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad (\text{en } \text{J} \cdot \text{m}^{-3})$$

$$\mathcal{E} = \int_{\text{volume}} u_e$$

Le champ électrique est vu comme dépositaire de l'énergie.

### B. Localisation de l'énergie dans un solénoïde

(cf. FIGURE 3)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L I^2 \quad L = \mu_0 n^2 S h \quad \mathcal{B} = \mu_0 n I$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 S h \left( \frac{\mathcal{B}}{\mu_0 n} \right)^2$$

$$\mathcal{E} = \underbrace{S h}_{\text{volume où règne le champ}} \times \frac{\mathcal{B}^2}{2\mu_0}$$

On pose  $u_m$  la densité volumique d'énergie magnétique :

$$u_m = \frac{\mathcal{B}^2}{2\mu_0} \quad (\text{en } \text{J} \cdot \text{m}^{-3})$$

$$\mathcal{E} = \int u_m$$

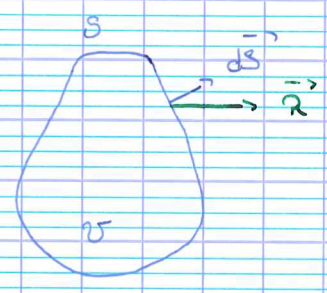
Le champ magnétique est dépositaire de l'énergie.

## 2. Transport et localisation de l'énergie électromagnétique

### A. Expression a priori d'un bilan

$\mathcal{V}$  contient

$$\mathcal{E}_{em} = \int_{\mathcal{V}} (u_e + u_m) d\mathcal{G}$$



$\vec{R}$ : vecteur décrivant le transport d'énergie.

Pendant  $dt$ ,  $S$  est traversée par

$$d\mathcal{E}_f = \int_{dS} \vec{R} \cdot d\vec{S} dt$$

$\uparrow$   
 $W \cdot m^{-2}$  (par construction)

Le champ cède aussi de l'énergie aux porteurs de charges.

$$d\mathcal{E}_c = \int_{\mathcal{V}} \mathcal{P} d\mathcal{G} dt \quad \text{où} \quad \mathcal{P} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Bilan :  $d\mathcal{E}_m = -d\mathcal{E}_f - d\mathcal{E}_c$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} u_{em} d\mathcal{G} = - \int_{\mathcal{S}} \vec{R} \cdot d\vec{S} - \int_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\mathcal{G} \quad (\text{où } u_{em} = u_e + u_m)$$

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_{em}}{\partial t} d\mathcal{G} = - \int_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{R}) d\mathcal{G} - \int_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\mathcal{G}$$

C'est vrai quelque soit le volume, on peut identifier les intégrands.

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = - \text{div}(\vec{R}) - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Forme d'un bilan local avec un terme source :

$$\text{div}(\vec{R}) + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = - \vec{j} \cdot \vec{E}$$



B. Ce bilan fonctionne !

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}}(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \times & \left( \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ \vec{\text{rot}}(\vec{B}) &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \times & \left( \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

$$-\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \frac{(\vec{E} \cdot \vec{\text{rot}}(\vec{B}) - \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}}(\vec{E}))}{\mu_0} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right)$$

$$-\frac{\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B})}{\mu_0} = \frac{\partial}{\partial t} (u_e + u_m) + \vec{J} \cdot \vec{E}.$$

$$\text{div} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (u_e + u_m) = -\vec{J} \cdot \vec{E}.$$

On identifie :  $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$

C. Ce qu'il faut savoir

(cf. encadré vecteur de Poynting)

### 3. Exemples de transport d'énergie

\* Boulet au four micro-onde.

#### A. Fil résistif

$$\text{Loi d'Ohm : } \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\gamma} = \frac{j}{\gamma} \vec{u}_z$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\omega_0} = -\frac{j^2}{2\gamma} \vec{u}_r$$

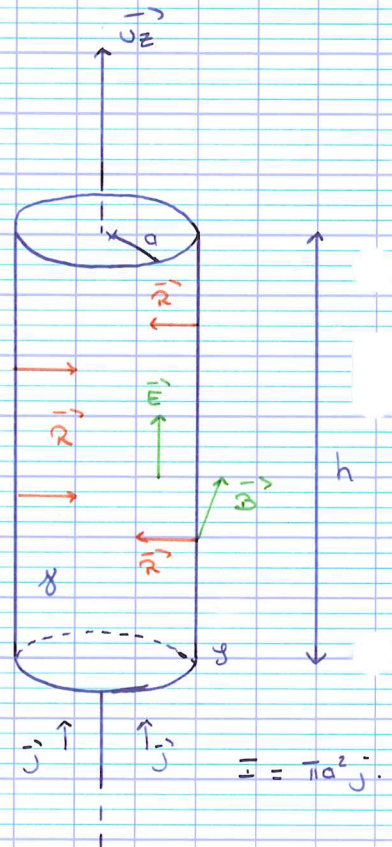
$$\vec{R}(a) = -\left(\frac{j}{a}\right)^2 \frac{a}{2\gamma} \vec{u}_r = -\frac{j^2}{\pi^2 \omega^3 2\gamma} \vec{u}_r$$

$$P_{\text{entre}} = \int_S \vec{R} \cdot (-dS \vec{u}_r)$$

$$= \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \gamma} \times 2\pi a h$$

$$= \frac{h}{\pi a^2 \gamma} I^2$$

$$= R I^2$$



La puissance entre par le côté et elle se dissipe (elle est donnée à la matière) dans le fil par effet Joule.



### B. Condensateur en régime variable

On se place dans l'ARQS électrique.

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_z$$

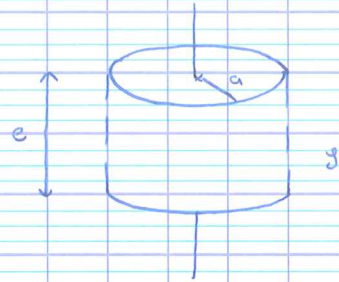
$$E_0 = -\frac{q}{\epsilon_0} = \frac{-Q}{\epsilon_0 \pi a^2}$$

On a vu qu'en régime variable :  $\vec{B} = \frac{r}{2c^2} \dot{E}_0 \vec{u}_\theta$

$$\vec{R} = -\frac{r}{2c^2 \mu_0} \dot{E}_0 \dot{E}_0 \vec{u}_r$$

$$= -\frac{r}{2} \epsilon_0 \dot{E}_0 \dot{E}_0 \vec{u}_r$$

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$



$$P_{entre} = \int_V \vec{R} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{R} \cdot (c \cdot d\vec{S} \vec{u}_r)$$

$$= \frac{a}{2} \epsilon_0 \dot{E}_0 \dot{E}_0 \times 2\pi a e$$

$$= \pi a^2 \epsilon_0 \dot{E}_0 \dot{E}_0 = \frac{d}{dt} (u_{em} U) = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

$$= \pi a^2 e \left( \frac{-Q}{\pi a^2} \right) \left( \frac{-\dot{Q}}{\epsilon_0 \pi a^2} \right)$$

$$= \frac{e}{\epsilon_0 \pi a^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Q^2 \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{Q^2}{2C} \right)$$

$$= \frac{d\mathcal{E}_{condensateur}}{dt}$$

$$\text{donc } d\mathcal{E} = P_{entre} dt$$

$$\text{" } d\mathcal{E}_{stock} = d\mathcal{E}_{ech} \text{"}$$

Les champs électromagnétiques sont porteurs et vecteurs d'énergie.