

CHAPITRE 19 : PHENOMENES ONDULATOIRES

On appelle onde la propagation dans l'espace au fil du temps de la variation d'une grandeur physique. Elle intervient de proche en proche à cause du couplage entre points voisins.

Exemple : vagues

I. Mise en équation de quelques phénomènes

1. Ondes transversales dans une corde tendue

A. Hypothèses

(cf. FIGURE 1)

- * Mouvement transverse ($\perp \vec{u}_x$ donc selon \vec{y})
- * $y(x, t)$ représente le déplacement
- * On néglige la gravité et les phénomènes dissipatifs (comme les frottements visqueux).
- * On considère de petits mouvements. ($y \ll L$, $y \ll \lambda$)
 \Rightarrow Corde peu inclinée. ($|\frac{dy}{dx}| \ll 1$)
- * On note T_0 la tension de repos de la corde,
 $\mu = \frac{m}{L}$ la masse linéaire de la corde.
- * On considère une corde sans raideur.
 $\Rightarrow \vec{T}$ est colinéaire au fil (à la corde).
- * $T(x, t)$ est la norme de la tension exercée par la partie située à droite de x sur la partie située à gauche.

3. Mise en équations

(cf. FIGURE 2)

$$\alpha(\alpha, t) \approx \tan(\alpha(\alpha, t)) = \frac{\partial y}{\partial x}(\alpha, t)$$

Système : morceau infinitésimal de corde situé en α et $\alpha + d\alpha$.

Principe fondamental de la dynamique :

$$(1) \quad \vec{u}_\alpha : \quad 0 = T(\alpha + d\alpha, t) \cos(\alpha(\alpha + d\alpha, t)) - T(\alpha, t) \cos(\alpha(\alpha, t))$$

$$(2) \quad \vec{u}_y : \quad \mu d\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(\alpha, t) = T(\alpha + d\alpha, t) \sin(\alpha(\alpha + d\alpha, t)) - T(\alpha, t) \sin(\alpha(\alpha, t))$$

D'après (1), $T(\alpha + d\alpha, t) \approx T(\alpha, t)$ (car $\cos(\alpha) \approx 1$)

donc T ne dépend pas de α .

On peut l'évaluer au bout de la corde qui est au repos.

donc $T = T_0$. (on admet que $T_0 = \text{cste}$)

$$\text{Alors, d'après (2) : } \mu d\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(\alpha, t) \approx T_0 \alpha(\alpha + d\alpha, t) - T_0 \alpha(\alpha, t)$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &\approx T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} \\ &\approx T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned}$$

①

$$\text{Ainsi, } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

2. Vibrations Longitudinales d'une tige élastique

A. Hypothèses

(cf. FIGURE 3)

Quand le barreau s'allonge de δL , on a : $F = E \times S \times \frac{\delta L}{L_0}$

où F est la force exercée par la droite sur la gauche, elle est orientée vers la droite.

E est le module de Young (caractéristique du matériau), il s'exprime en Pa (souvent de l'ordre du GPa).

B. Mise en équations

(cf. FIGURE 4)

L'onde est longitudinale.

$$x \longrightarrow x + s(x, t)$$

$$x + dx \longrightarrow x + dx + s(x + dx, t)$$

Longueur : $dx \longrightarrow dx + s(x + dx, t) - s(x, t)$

(dx représente L_0)

$$dx \left[1 + \frac{s(x + dx, t) - s(x, t)}{dx} \right]$$

$$dx \left(1 + \frac{\partial s}{\partial x} \right)$$

Allongement : $\delta L = dx \left(1 + \frac{\partial s}{\partial x} \right) - dx$

$$= dx \frac{\partial s}{\partial x}$$

A chaque abscisse existe une force élastique.

$$F(x, t) = ES \frac{\partial s}{\partial x}$$

donc $F = ES \frac{\partial s}{\partial x}$

N.B.: La position de la tranche est $X(t) = x + s(x, t)$

On note ρ la masse volumique du barreau.
On applique le PFD à la tranche qui était au repos entre x et $x + dx$:

$$\rho S dx \times \frac{\delta^2 s}{\delta t^2}(x, t) = F(x + dx, t) - F(x, t)$$

$$\rho S \frac{\delta^2 s}{\delta t^2} = \frac{\delta F}{\delta x} = ES \frac{\delta^2 s}{\delta x^2}$$

→

Ainsi, $\frac{\delta^2 s}{\delta x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\delta^2 s}{\delta t^2} = 0$

3. Chaîne d'oscillateurs couplés

A. Hypothèses

(cf. FIGURE 5.1)

- * On néglige la gravité et les phénomènes dissipatifs.
- * On considère un déplacement longitudinal.

Au repos : $x = na$

En mouvement : $x = na + s_n(t)$

B. Mise en équations

On applique le PFD à la boule d'indice n :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 s_n(t)}{dt^2} &= F_{\text{droite}} + F_{\text{gauche}} \\ &= k(P_{\text{droite}} - P_0) - k(P_{\text{gauche}} - P_0) \\ &= k(a + s_{n+1} - s_n - P_0) - k(a + s_n - s_{n-1} - P_0) \\ &= k(s_{n+1} + s_{n-1} - 2s_n) \end{aligned}$$

N.B.: on doit bien obtenir $-2s_n$ puisque si n se déplace ce terme à gauche, on a $+2s_n$, on retrouve une équation sur un oscillateur harmonique

On a une famille d'équations différentielles couplées.

C. Approximation des milieux continus

(cf. FIGURE 5.2)

N.B. : on utilise

la formule de Taylor-Young

i.e. $f(x+h) = f(x) + hf'(x)$

$+ \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots$

Passage du discret au continu :

$$s_n(t) \longrightarrow s(x, t)$$

$$\text{avec } s_n(t) = s(x = na, t)$$

$$\bullet s_{n+1}(t) = s(na + a, t)$$

$$= s(na, t) + a \frac{\partial s}{\partial x}(na, t) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}(na, t)$$

$$\bullet s_{n-1}(t) = s(na - a, t)$$

$$= s(na, t) - a \frac{\partial s}{\partial x}(na, t) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}(na, t)$$

$$\text{donc } s_{n+1}(t) + s_{n-1}(t) = 2s_n(t) + a^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}(na, t)$$

$$\text{Alors, } m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}(na, t) = ka^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}(na, t)$$



$$\text{Ainsi, } \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{m}{ka^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

Ce passage est valable si $a \ll \lambda$ (la longueur d'onde λ est l'échelle des variations de s).

D. Lien avec les ondes dans un barreau élastique

(cf. FIGURE 6)

Les atomes du réseau cristallin sont comme les boules de la chaîne.

$$\rho = \frac{m}{a^3}$$

* Longueur du barreau : L_0

Chaque chaîne contient $\frac{L_0}{a}$ atomes

Appareillement de chaque ressort : $\frac{\delta L}{L_0/a}$

Sur 1 ressort :

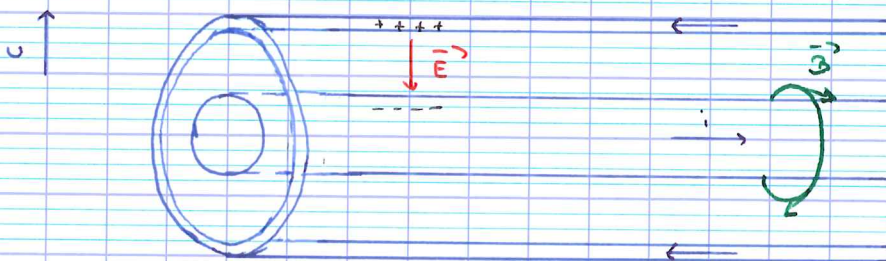
$$F_s = k \frac{\delta L}{L_0} a$$

$$\begin{aligned} F_{\text{tot}} &= F_s \times \frac{S}{a^2} \\ &= k \frac{\delta L}{L_0} a \frac{S}{a^2} \\ &= \frac{k}{a} S \frac{\delta L}{L_0} \end{aligned}$$

En comparant avec I.2., on identifie : $E = \frac{k}{a}$

$$\rho \frac{L}{E} = \frac{m/a^3}{k/a} = \frac{m}{ka^2}$$

4. Signaux électriques dans une ligne bifilaire



A. Hypothèses et modèles à constantes réparties

(cf. FIGURE 7)

Entre les deux conducteurs existent des effets capacitifs et inductifs.

3. Mise en équations

N.B.: i et u ne sont pas les mêmes tout le long du câble. On étudie les variations de $u(x, t)$ et $i(x, t)$. On n'est pas dans l'ARQS.

Loi des mailles:

$$u(x + dx, t) = u(x, t) - dL \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$u(x + dx, t) - u(x, t) = -\Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t}$$

N.B.: hors

donc
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \quad (dt)$$

ARQS à l'échelle

du câble, on

Loi des noeuds:

$$i(x + dx, t) = i(x, t) - dC \frac{\partial u}{\partial t}(x + dx, t)$$

$$i(x + dx, t) - i(x, t) = -\Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}(x + dx, t)$$

infinitésimaux

donc
$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \quad (dx)$$

$$\frac{\partial (dt)}{\partial x} : = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial (dx)}{\partial t} : \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

donc
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

→

Ainsi,
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$\Gamma \Lambda = \mu_0 \epsilon_0$ (dans le vide)

$= \mu_0 \epsilon$ (dans un autre matériau)

II. Equation de d'Alembert

1. Identification de la célérité



$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2 f}{\delta t^2} = 0$$

$$[c] = L \cdot T^{-1}$$

c est la vitesse des ondes dans chaque problème étudié.

Exemples :

* corde : $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$

* barreau : $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx 5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

* ressorts : $c = \sqrt{\frac{a^2 k}{m}}$

* câble : $c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}} \approx 2 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

On remarque que plus un matériau est raide ou tendu, plus l'onde va vite.

De même, plus le matériau est lourd, moins elle va vite.

L'équation de d'Alembert décrit les ondes les plus simples (ondes idéales en quelque sorte).

2. Ondes progressives

Soit une fonction f_+ :

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto f_+(u)$$



$$f(x, t) = f_+(x - ct)$$

est solution de l'équation de d'Alembert.

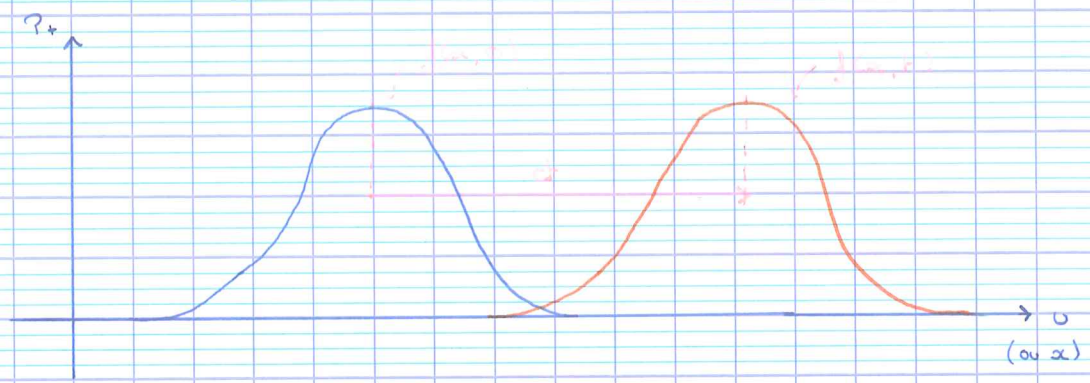
En effet, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \mathcal{P}_+'' - \frac{1}{c^2} (-c)^2 \mathcal{P}_+''$

$f(x,t) = \mathcal{P}_-(x-ct)$ est également solution,

$f(x,t) = \mathcal{P}_+(x-ct) + \mathcal{P}_-(x+ct)$ ←

N.B.: toute solution de cette équation peut s'écrire à partir de cette forme

C'est la solution la plus générale de l'équation de d'Alembert.



$f(x,0) = \mathcal{P}_+(x)$
 $f(x,t) = \mathcal{P}_+(x-ct)$

3. Ondes progressives harmoniques (ou monochromatiques)

A. Définition et propriétés

N.B.: onde progressive signifie que l'on se restreint à \mathcal{P}_+ ou \mathcal{P}_- . Leur somme ne représente pas une onde progressive.

$\mathcal{P}_+(u) = A \cos(ku + \varphi_0)$
 $f(x,t) = A \cos(k(x-ct) + \varphi_0)$
 $= A \cos(kx - ckt + \varphi_0)$

→ $f(x,t) = A \cos(kx - \omega t + \varphi_0)$ où $\omega = ck$.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{ck} = \frac{\lambda}{c} \quad ; \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$\lambda = cT$$

4. Ondes stationnaires

A. Définition

On appelle onde stationnaire une onde de la forme :

$$f(x, t) = G(x)H(t)$$

En reportant dans l'équation de d'Alembert, on trouve :

$$G(x) = A \cos(kx + \varphi)$$

$$H(t) = B \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{avec } \omega = ck)$$

B. Visualisation

(cf. FIGURE 8)

* Un noeud est un point tel que $G(x) = 0$.

$$kx + \varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad x_n = n \frac{\pi}{k} + \frac{\pi}{2k} - \frac{\varphi}{k}$$

$$x_n = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{2\pi} \varphi_0 \quad (\text{positions des noeuds})$$

* Un ventre est un point tel que $G(x) = \pm A$.

$$kx + \varphi = n\pi$$

$$x'_n = n \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2\pi} \varphi_0 \quad (\text{positions des ventres})$$

N.B. : variable quand l'onde est solution de l'équation de d'Alembert

N.B. : onde stationnaire

N.B. : si elle est solution de l'équation de d'Alembert

C. Lien avec les ondes progressives harmoniques

$$\begin{aligned}
 f(x, t) &= AB \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \varphi) \\
 &= \frac{AB}{2} \left[\underbrace{\cos(kx - \omega t + \varphi - \varphi)}_{\text{OPH } \propto \nearrow} \underbrace{\cos(kx + \omega t + \varphi + \varphi)}_{\text{OPH } \propto \searrow} \right]
 \end{aligned}$$

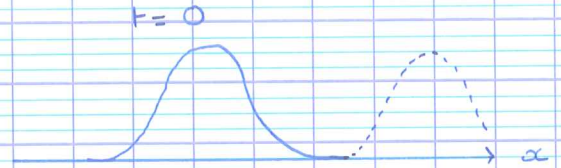
Une onde stationnaire est la superposition de deux ondes progressives harmoniques de même amplitude voyageant en sens inverse.

III. Etude de mouvements particuliers

1. Corde infinie pincée

On se donne :

$$\begin{cases}
 \forall x, f(x, 0) = f_0(x) \\
 \forall x, \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = 0
 \end{cases}$$



N.B. : la corde est tendue, initialement pincée puis relâchée.

On sait qu'elle est solution de l'équation de d'Alembert, donc :

$$f(x, t) = \mathcal{P}_+(x - ct) + \mathcal{P}_-(x + ct)$$

$$\forall x, \mathcal{P}_+(x) + \mathcal{P}_-(x) = f_0(x)$$

$$\forall u, \mathcal{P}_+(u) + \mathcal{P}_-(u) = f_0(u)$$

$$\forall x, -c\mathcal{P}'_+(x) + c\mathcal{P}'_-(x) = 0$$

$$\forall u, \mathcal{P}'_+(u) = \mathcal{P}'_-(u) \quad \rightarrow \quad \mathcal{P}_+(u) = \mathcal{P}_-(u) + cste$$

$$\text{donc } \mathcal{P}_-(u) + cste + \mathcal{P}_-(u) = f_0(u)$$

$$\text{donc } \mathcal{P}_-(u) = \frac{1}{2}(f_0(u) - cste)$$

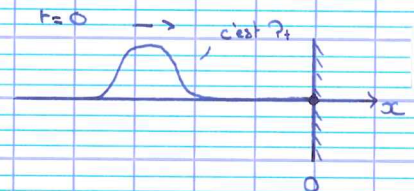
$$\mathcal{P}_+(u) = \frac{1}{2}(f_0(u) + cste)$$

Ainsi, $f(x,t) = \frac{f_0(x-ct)}{2} + \frac{f_0(x+ct)}{2}$.

2. Réflexion d'une onde progressive sur un noeud

C'est une solution de l'équation de d'Alembert.

donc $f(x,t) = \mathcal{P}_+(x-ct) + \mathcal{P}_-(x+ct)$



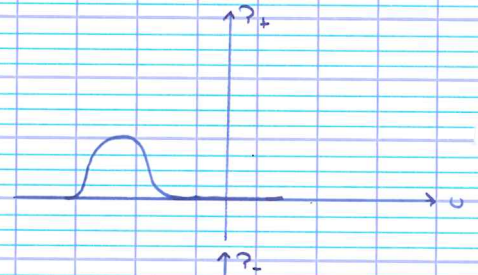
* C1 : $\forall x < 0$,

$$f(x,0) = \mathcal{P}_+(x) + \mathcal{P}_-(x)$$

avec $\mathcal{P}_-(x) = 0$ par hypothèse

$\forall u < 0$, $\mathcal{P}_+(u)$ connu

$$\mathcal{P}_-(u) = 0$$

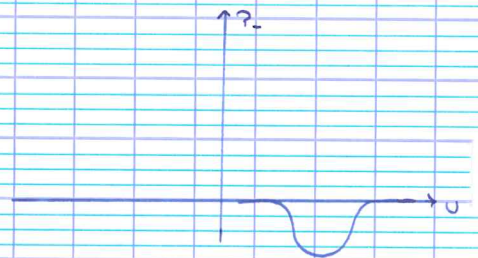


* C2 : $\forall t, x = 0, f(0,t) = 0$

$$\mathcal{P}_+(-ct) + \mathcal{P}_-(ct) = 0$$

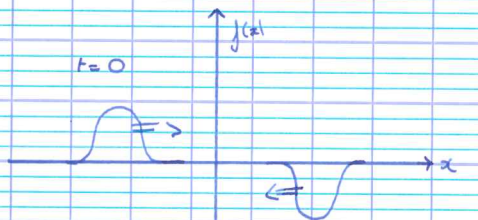
$\forall u, \mathcal{P}_+(-u) + \mathcal{P}_-(u) = 0$

$$\forall u, \mathcal{P}_+(-u) = -\mathcal{P}_-(u)$$

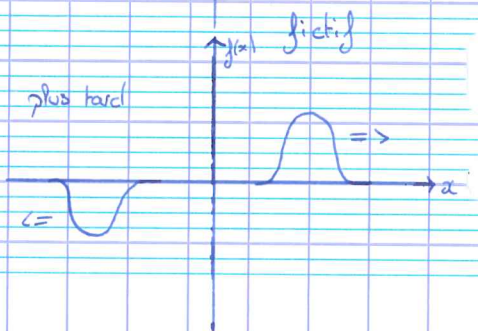


On connaît alors,

$$f(x,t) = \mathcal{P}_+(x-ct) + \mathcal{P}_-(x+ct)$$



L'onde se réfléchit avec changement de signe.



N.B.: l'onde ne s'est pas encore réfléchi

3. Réflexion d'une onde progressive harmonique sur un noeud

Même situation que III.2, mais avec une onde sinusoïdale.

Onde incidente : $f_i(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$

On cherche l'onde réfléchie : $f_r(x, t) = B \cos(k_r x + \omega_r t + \varphi)$

* C3 : $\forall t, x = 0, f(0, t) = 0$

$$f_r(0, t) + f_i(0, t) = 0$$

$$A \cos(-\omega t) + B \cos(\omega_r t + \varphi) = 0$$

donc $\omega_r = \omega, \varphi = 0, B = A$.

$$k_r = \frac{\omega_r}{c} = \frac{\omega}{c} = k$$

L'onde se réfléchit en changeant de signe.

$$f(x, t) = A \cos(kx - \omega t) - A \cos(kx + \omega t)$$

$$= A \times (-2 \sin(kx) \sin(-\omega t))$$

$$= 2A \sin(kx) \sin(\omega t).$$

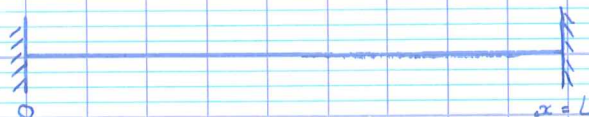
-- Onde stationnaire avec un noeud en $x = 0$.

4. Modes propres d'une corde fixée aux deux extrémités

(cf. FIGURE 9)

Un mode propre est une onde stationnaire compatible avec les conditions de bords d'un système borné.

Preons une corde nouée aux deux bouts.



$$f(x, t) = A \sin(kx + \varphi) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = ck$$

$$\bullet \quad x = 0 : \quad \forall t, \quad A \sin(\varphi) \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\text{donc } \sin(\varphi) = 0$$

$$\text{donc } \varphi = q\pi, \quad \varphi = 0.$$

$$\bullet \quad x = L : \quad \forall t, \quad A \sin(kL) \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\text{donc } \sin(kL) = 0$$

$$\text{donc } kL = n\pi \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^+.$$

$$k_n = n \frac{\pi}{L} ; \quad \omega_n = \frac{nc\pi}{L} ; \quad \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}$$

$$f_n = \frac{nc}{2L} ; \quad L = n \frac{\lambda}{2}.$$

5. Etude d'un mouvement quelconque grâce aux modes propres

Pour voir un mode propre, il faudrait une condition initiale sinusoïdale avec $L = n \frac{\lambda}{2}$.

Une condition initiale réaliste serait par exemple celle de la figure 10.

Toute condition initiale est décomposable comme une somme de sinusoïdes, et donc le mouvement est une superposition de modes propres.

$$\exists A_n, \exists \varphi_n, \quad f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n).$$

Les A_n et φ_n dépendent des conditions initiales (position et vitesse).

Sans vitesse initiale, $v(x, \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0)) = 0$

On a alors, $\forall n, \varphi_n = 0$.

Dans l'exemple de la figure 10, $A_n = \frac{2hL^2}{n^2 a(L-a)} \times \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$.

On a ainsi le spectre du mouvement.

$$\begin{array}{l} n=1, A_1, f_1 = \frac{c}{2L} \\ n=2, A_2, f_2 = 2 \times \frac{c}{2L} \\ \vdots \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{] fondamental (note jouée)} \\ \text{] harmoniques} \end{array} \right\}$$

Pour des raisons artistiques, on préfère $A_7 = 0$.

Pour ce faire, il suffit d'avoir, $\sin\left(\frac{7\pi a}{L}\right) = 0$.

i.e. $\frac{7\pi a}{L} = \pi$

i.e. $a = \frac{L}{7}$.

Le choix des conditions initiales déterminent le spectre.

6. Oscillations forcées d'une corde fixée à une extrémité

(cf. FIGURE 11)

Le vibreur impose : $x = -L, \forall t, f(x, t) = f_0 \cos(\omega t)$

Cherchons $f(x, t) = A \sin(kx + \varphi) \cos(\omega t + \psi)$

* CB : en $x = 0$, donc $\varphi = 0$

* CB : en $x = -L$: $A \sin(-kL) \cos(\omega t + \varphi) = f_0 \cos(\omega t)$

donc $\varphi = 0$ et $f_0 = -A \sin(kL)$.

Ainsi, $f(x, t) = \frac{-f_0}{\sin(kL)} \sin(kx) \cos(\omega t)$.

Il y a résonance lorsque $\sin(kL) = 0$, i.e. $kL = n\pi$,

i.e. $k = \frac{n\pi}{L} = k_n$.

$$\omega = ck = ck_n$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\text{donc } f = f_n = \frac{nc}{2L}$$

Il y a résonance lorsque la fréquence imposée par le vibreur est celle d'un des modes propres.

Les phénomènes dissipatifs, qui avaient été négligés, limitent le mouvement.

Autre vision, si $\sin(kL) = 0$, $f_0 = 0$, on a donc un nœud aux deux extrémités et c'est pour cette raison que l'on retrouve un mode propre.

Attention, les modes propres changent si on change les conditions de bords.