CHAPITRE 21 : ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS LE VIDE

N.B : Ces ondes sont également appelées « ondes hertziennes ».

A cause des termes en $\frac{\partial E}{\partial t}$ dans Maxwell-Ampère et en $\frac{\partial B}{\partial t}$ dans Maxwell-Faraday, un champ électromagnétique peut se propager de proche en proche à partir d'une source dépendant du temps.

I. Description des ondes électromagnétiques dans le vide

1. Équation de d'Alembert et célérité des ondes électromagnétiques

Dans le vide, on a : $\vec{j} = \vec{0}$ et $\rho = 0$

Les équations de Maxwell se réécrivent :

* Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}(\vec{E}) = 0$
* Maxwell-Ampère : $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
* Maxwell-Faraday : $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
* Maxwell-Thomson : $\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$.

$$\vec{\mathrm{rot}}\left(\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E})\right) = -\vec{\mathrm{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

donc $$\vec{\mathrm{grad}}\big(\underbrace{\mathrm{div}(\vec{E})}_{=0\ (MG)}\big) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\big(\underbrace{\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B})}_{MA}\big)$$

$$\Delta E - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \vec{0}$$

Ainsi, on en déduit l'équation de d'Alembert :

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.}$$

Parfois notée : $\Box\vec{E} = \vec{0}$ ($\Box$: d'Alembertien).

N.B : L'optique est une branche approximative de l'électromagnétique.

On en déduit la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide :

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \qquad \text{A.N. } c = 299792458 \text{ m.s}^{-1} \simeq 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}.}$$

Chaque composante cartésienne de $\vec{E}$ ou de $\vec{B}$ représente une équation de d'Alembert.

Exemple pour E_x :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 .$$

2. Structure des OEM PPH (calcul dans $\mathbb{C}$).

$$\vec{E} \left| \begin{array}{l} E_{0x} \cos(\vec{k}.\vec{OM} - \omega t + \varphi_{0x}) \\ E_{0y} \cos(\vec{k}.\vec{OM} - \omega t + \varphi_{0y}) \\ E_{0z} \cos(\vec{k}.\vec{OM} - \omega t + \varphi_{0z}) \end{array} \right.$$

$$\vec{k} = k\vec{u} \qquad \text{avec} \qquad \omega = ck$$

$$\vec{E} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{E}})$$

$$\underline{\vec{E}} \left| \begin{array}{l} E_{0x}\, e^{j(\vec{k}.\vec{OM} - \omega t + \varphi_{0x})} \\ E_{0y}\, e^{j(\vec{k}.\vec{OM} - \omega t + \varphi_{0y})} \\ E_{0z}\, e^{j(\vec{k}.\vec{OM} - \omega t + \varphi_{0z})} \end{array} \right.$$

On pose :

$$\underline{\vec{E_0}} \left| \begin{array}{l} E_{0x}\, e^{j\varphi_{0x}} \\ E_{0y}\, e^{j\varphi_{0y}} \\ E_{0z}\, e^{j\varphi_{0z}} \end{array} \right. .$$

1) Ainsi, on définit : $\boxed{\begin{array}{l} \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}\, e^{j(\vec{k}.\vec{OM} - \omega t)} \\ \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}_0}\, e^{j(\vec{k}.\vec{OM} - \omega t)} \end{array}}$

* Maxwell - Gauss :

$$\mathrm{div}(\underline{\vec{E}}) = 0$$

donc $j.\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0$

donc $jk\vec{u}.\underline{\vec{E}} = 0$

donc $\vec{u}.\vec{E} = 0$

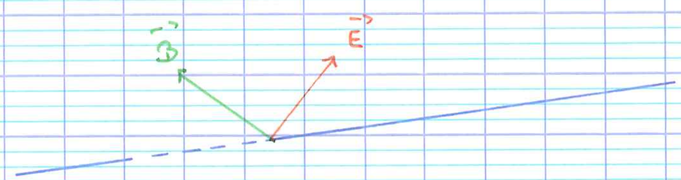
* Maxwell - ϕ :

$$\mathrm{div}(\underline{\vec{B}}) = 0$$

donc $\vec{u}.\vec{B} = 0$

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires à $\vec{u}$.
L'onde est transverse pour les deux champs.

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont inclus dans le plan d'onde.



* Maxwell - Faraday :

$$\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$j\vec{k} \wedge \vec{E} = -(-j\omega \vec{B})$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} = \frac{k}{\omega} \vec{u} \wedge \vec{E}$$

$(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ forme une base orthogonale directe.

Relation de structure : $\vec{B} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E}$

⚠ OPP uniquement !
↳ en cas de doute, revenir à Maxwell - Faraday.

Cas particulier où $\vec{E}$ n'a qu'une seule composante. (cf. FIGURE 1)

* Maxwell - Ampère : donne $\vec{E} = c\vec{B} \wedge \vec{u}$.

Ces propriétés s'étendent à une OPP non nécessairement harmonique. En effet, une OPP quelconque peut s'écrire comme une somme d'OPPH.

3. Structure des OEM PPH (calcul dans $\mathbb{R}$)

Le calcul dans $\mathbb{R}$ est plus pénible.

Prenons $\vec{u} = \vec{u_x}$

$$\vec{E} \left| \begin{array}{l} E_{0x} \cos(kx - \omega t + \varphi_{0x}) \\ E_{0y} \cos(kx - \omega t + \varphi_{0y}) \\ E_{0z} \cos(kx - \omega t + \varphi_{0z}) \end{array} \right.$$

* $\mathrm{div}(\vec{E}) = 0$

donc $-kE_{0x}\sin(kx - \omega t + \varphi_{0x}) + 0 + 0 = 0$

donc $E_{0x} = 0$

$\vec{E}$ est par conséquent transverse.

* de même pour $\vec{B}$: $\vec{B}$ est transverse.

* Maxwell-Faraday : $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_{0x}\cos(kx - \omega t + \varphi_{0x}) \\ E_{0y}\cos(kx - \omega t + \varphi_{0y}) \\ E_{0z}\cos(kx - \omega t + \varphi_{0z}) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ kE_{0z}\sin(kx - \omega t + \varphi_{0z}) \\ -kE_{0y}\sin(kx - \omega t + \varphi_{0y}) \end{vmatrix}.$$

En intégrant Maxwell-Faraday, on trouve :

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} 0 + \mathrm{cste}_x \\ -\frac{k}{\omega} E_{0z}\cos(kx - \omega t + \varphi_{0z}) + \mathrm{cste}_y \\ \frac{k}{\omega} E_{0y}\cos(kx - \omega t + \varphi_{0y}) + \mathrm{cste}_z \end{vmatrix}$$

N.B. : on met d'autorité les constantes d'intégration égales à 0 puisqu'elles représentent des champs constants qui ne sont pas des ondes, cela ne nous intéresse pas.

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{1}{c} E_z \\ \frac{1}{c} E_y \end{vmatrix} = \frac{\vec{u}_x}{c} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} = \frac{\vec{u}_x}{c} \wedge \vec{E}.$$

4. Spectre et nomenclature des ondes hertziennes

(H. Hertz, Karlsruhe, 1886)

N.B : téléphonie mobile à 900 MHz
FM : 100 MHz

Spectre des ondes électromagnétiques. (cf. FIGURE 2)

II. Aspect énergétique

1. Cas d'une OEM ??

N.B. : Là où il y a un champ, il y a de l'énergie. ~~Asi~~ Ainsi, là où il y a une onde, il y a de l'énergie.

* $u_e = \varepsilon_0 \dfrac{E^2}{2}$

* $u_m = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$

or $|\vec{B}| = \dfrac{|\vec{E}|}{c}$

donc $u_m = \dfrac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} = u_e$.

Ainsi, $u_{em} = u_e + u_m = 2u_e = \varepsilon_0 E^2$.

* $\vec{R} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

$= \dfrac{E \times \frac{E}{c} \, \vec{u}}{\mu_0}$ (relation de structure).

donc $\vec{R} = \dfrac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}$

Autre méthode : $\vec{R} = \dfrac{\vec{E}}{\mu_0} \wedge \left(\dfrac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E} \right)$

Formule : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

$= \vec{b}(\vec{a}.\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}.\vec{b})$

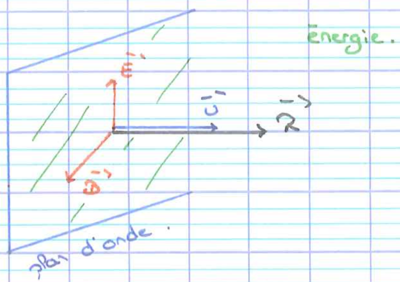
$$\vec{R} = \frac{(\vec{E}\cdot\vec{E})}{\mu_0 c}\vec{u} - \frac{(\vec{E}\cdot\vec{u})\vec{E}}{\mu_0 c}$$

0

$$= \frac{E^2}{\mu_0 c}\vec{u}$$

L'énergie voyage dans le même sens et dans la même direction que l'onde.

Cela rappelle le théorème de Malus.



* $\vec{R} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u}$

$= u_{em}\, c\, \vec{u}$

N.B. : on rappelle que $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$.

Par analogie avec $\vec{j_m} = \rho\vec{v}$, l'énergie a pour vitesse $\vec{v_e} = c\vec{u}$.

2. Intensité d'une OEM ??

$I = \langle R \rangle$. (en $W.m^{-2}$)

Pour une OEM PPH :

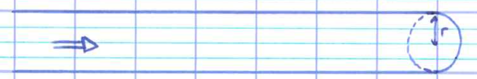
$$\vec{E} = \begin{vmatrix} 0 \\ E_{0y}\cos(kx - \omega t) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{R} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u_x}$$

$$I = \varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle = \varepsilon_0 c \frac{E_{0y}^{\;2}}{2}.$$

$E_{0_{eff}} = \frac{E_{0y}}{\sqrt{2}}$ donc $I = \varepsilon_0 c\, E_{0_{eff}}^{\;2}$.

Exemple : Laser He - Ne $\mathcal{P} = 1 \text{ mW}$



$r = 2 \text{ mm}$

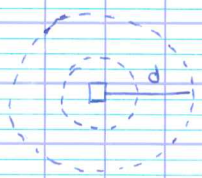
$$I = \frac{\mathcal{P}}{\pi r^2} = 80 \text{ W.m}^{-2}.$$

$$E_{0_{eff}} = \sqrt{\frac{I}{\varepsilon_0 c}} = 173 \text{ V.m}^{-1}$$

$$B_{0_{eff}} = \frac{E_{0_{eff}}}{c} = 6.10^{-7} \text{ T}.$$

Exemple : téléphone $\mathcal{P} = 2 \text{ W}$.

hypothèse : isotropie



$$I = \frac{\mathcal{P}}{4\pi d^2}$$

$d = 1 \text{ cm}$

A.N. $I = 16 \text{ W.m}^{-2}$ $E_{0_{eff}} = 77 \text{ V.m}^{-1}$.

4. Description corpusculaire du rayonnement

Une onde électromagnétique peut être vue comme un flux de photons.

Notons,

* n : nombre de photons par volume.
* c : vitesse
* $\mathcal{E} = h\nu$.

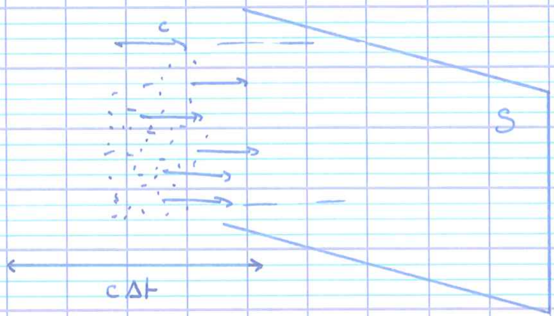
$u_{em} = n\mathcal{E} = nh\nu$

$I = u_{em} c = n\mathcal{E}c.$

Licht quant. (Einstein)

Raisonnement plus détaillé :

Pendant Δt, le plan reçoit :



$$W = \mathcal{E} \times \underbrace{S c \Delta t \times n}_{\text{nombre de photons}}$$

énergie

Par définition de I,

$W = I S \Delta t$

En identifiant, $I S \Delta t = S c \Delta t \, n \, \mathcal{E}$

donc $I = n c \mathcal{E}$.

5. Energie et notation complexe

N.B : la notation complexe s'utilise lors de calculs linéaires.

$\vec{E} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{E}})$ et $\vec{B} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{B}})$.

$$\vec{E} \wedge \vec{B} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{E}}) \wedge \mathrm{Re}(\underline{\vec{B}}) \neq \underbrace{\mathrm{Re}(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}})}_{\text{faux !!}}$$

Pour calculer $\vec{R}$, on revient d'abord en notation réelle pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

Danger à chaque fois que l'on fait le produit de valeurs sinusoïdales traitées en notation complexe.

Exemples : $u_e = \varepsilon_0 \dfrac{E^2}{2}$

$p = \vec{j} \cdot \vec{E}$.

Pour obtenir des valeurs moyennes, on peut cependant utiliser l'astuce suivante.

Lemme : u et v sont deux grandeurs sinusoïdales de même pulsation ω.

$$u = \mathrm{Re}(\underline{u})$$
$$v = \mathrm{Re}(\underline{v}).$$

Alors, $\langle uv \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}(\underline{u}\,\underline{v}^*)$

Démonstration :

$u = u_0 \cos(\omega t + \varphi)$ $\qquad$ $v = v_0 \cos(\omega t + \psi)$

$\underline{u} = u_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ $\qquad$ $\underline{v} = v_0 e^{j(\omega t + \psi)}$

* $$uv = \frac{u_0 v_0}{2} \left(\cos(2\omega t + \varphi + \psi) + \cos(\varphi - \psi) \right)$$

$$\langle uv \rangle = \frac{u_0 v_0}{2} \cos(\varphi - \psi).$$

* $$\underline{u}\,\underline{v}^* = u_0 e^{j(\omega t + \varphi)} v_0 e^{-j(\omega t + \psi)}$$

$$= u_0 v_0 e^{j(\varphi - \psi)}.$$

Grâce à ce lemme, on a :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0} \right)$$

$$\langle u_e \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\frac{\varepsilon_0}{2} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^* \right).$$

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{j}} \cdot \underline{\vec{E}}^* \right).$$

Exemple : cf. II.2.

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \vec{u}_y e^{j(kx-\omega t)}$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{u}_x}{c} \wedge \underline{\vec{E}} = \frac{E_0}{c} e^{j(kx-\omega t)} \vec{u}_z .$$

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\frac{E_0}{\mu_0} \vec{u}_y e^{j(kx-\omega t)} \wedge \frac{E_0}{c} e^{-j(kx-\omega t)} \vec{u}_z \right) .$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x \right) = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x .$$

III. Polarisation des OEM PPH

1. Notion de polarisation

(cf. FIGURE 3)

Définition : La polarisation d'une OEM est définie à partir de la nature de la trajectoire décrite au cours du temps par l'extrémité P du vecteur $\vec{E}$ dans un plan d'onde donné, telle que la voit un observateur qui regarde cette onde venir à lui.

Considérons une OEM PPH, $x \nearrow$:

$$\vec{E} \left| \begin{array}{l} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - kx + \theta_y) \\ E_{0z} \cos(\omega t - kx + \theta_z) \end{array} \right.$$

N.B. : θ est l'avance de phase

Changeons l'origine de t (des temps) :

$$\omega t' = \omega t - kx_0 + \theta_y$$

$$\omega t - kx_0 = \omega t' - \theta_y .$$

$$\vec{E}\ \left|\begin{array}{l} 0 \\ E_{0y}\cos(\omega t') \\ E_{0z}\cos(\omega t' + \theta_z - \theta_y) \end{array}\right.$$

$\theta = \theta_z - \theta_y$ (déphasage)

$$\vec{E}\ \left|\begin{array}{l} 0 \\ E_{0y}\cos(\omega t') = Y_P \\ E_{0z}\cos(\omega t' + \theta) = Z_P \end{array}\right.$$

2. Polarisation rectiligne :

Définition : On a une polarisation rectiligne (PR) lorsque le point P décrit un segment de droite.

* si $\theta = 0$:

$E_y = Y_P = E_{0y}\cos(\omega t)$

$E_z = Z_P = E_{0z}\cos(\omega t)$

$$\vec{OP} = \cos(\omega t)\ \left|\begin{array}{l} E_{0y} \\ E_{0z} \end{array}\right.$$

* si $\theta = \pi$:

$$\vec{OP} = \cos(\omega t)\ \left|\begin{array}{l} E_{0y} \\ -E_{0z} \end{array}\right.$$

3. Polarisation circulaire

Pour une polarisation circulaire (PC), le point P décrit un cercle. (cf. FIGURE 4)

4. Polarisation elliptique

C'est le cas général.

Si θ est quelconque, on obtient une ellipse « penchée ».

* $\vec{v_P} = \dfrac{d\vec{E}}{dt} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\omega E_{0y} \sin(\omega t) \\ -\omega E_{0z} \sin(\omega t + \theta) \end{vmatrix}$

Quand $\omega t = 0$, $\cos(\omega t) = 1$, P est à droite.

Alors, $\vec{v_P} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega E_{0z} \sin(\theta) \end{vmatrix}$

* si $\sin(\theta) > 0$: $\Downarrow$ PE Droite
* si $\sin(\theta) < 0$: $\Uparrow$ PE Gauche

5. Lumière naturelle

La lumière est émise par une foule d'atome et le champ électrique $\vec{E}$ présente une direction aléatoire dans le plan d'onde.

La lumière naturelle n'est pas polarisée.

E_{0y}, E_{0z} et θ varient aléatoirement.

cf. TP pour apprendre à fabriquer de la lumière polarisée

6. Polarisation et notation complexe.

Pour bien identifier la polarisation, mieux vaut revenir en notation réelle.

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}}\, e^{j(kx-\omega t)}$$

Exemple : $\underline{\vec{E_0}} = E_0 \vec{u_y}$

$\vec{E} = E_0 \vec{u_y} \cos(kx - \omega t)$ PR.

Exemple : $\underline{\vec{E_0}} = E_0 \vec{u_z} + j E_0 \vec{u_y}$.

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} 0 \\ -E_0 \sin(kx - \omega t) \\ E_0 \cos(kx - \omega t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ E_0 \sin(\omega t - kx) \\ E_0 \cos(\omega t - kx) \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\omega t - kx - \pi/2) \\ -E_0 \sin(\omega t - kx - \pi/2) \end{vmatrix}.$$