

## CHAPITRE 22 : DISPERSION ET ABSORPTION

L'équation de D'Alembert représente les ondes les plus simples.

### I. Deux exemples de phénomènes ondulatoires

#### 1. Ondes dans un axe coaxial

##### A. Hypothèses et modélisation

(cf. FIGURE 1)

##### B. Mise en équations

Notons,

$$\bullet dR = r dx$$

$$\bullet dG = g dx$$

$$\bullet dL = \Lambda dx$$

$$\bullet dC = \Gamma dx$$

Loi des mailles :  $u(x, t) = u(x + dx, t) + dL \frac{di}{dt} + dRi$

$$\text{donc } \frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx} = - \frac{dL}{dx} \frac{di}{dt} - \frac{dR}{dx} i$$

$$\text{donc } \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = - \Lambda \frac{di}{dt} - r i} \quad (d)$$

Loi des nœuds :  $i(x, t) = i(x + dx, t) + dC \frac{\partial u}{\partial t} + dG u$

$$\text{donc } \boxed{\frac{di}{dx} = - \Gamma \frac{\partial u}{\partial t} - g u} \quad (d')$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} : \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - r \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} : \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\Lambda \left( -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g \frac{\partial u}{\partial t} \right) - r \left( -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} - g u \right) \\ &= \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (\Lambda g + r \Gamma) \frac{\partial u}{\partial t} + r g u. \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit l'équation des télégraphistes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\Lambda g + r \Gamma) \frac{\partial u}{\partial t} - r g u = 0.$$

## 2. Chaîne de pendules couplées

### A. Modélisation

(cf. FIGURE 2)

### B. Mise en équations

Notons,

\*  $C$  Pa constante de torsion du fil de torsion

Le fil de torsion situé entre  $O_{n-1}$  et  $O_n$  exerce sur le pendule (n)

le couple  $-C(\theta_n - \theta_{n-1})$ .

TMC sur le pendule (n) projeté selon l'axe  $(O_n, \vec{x}_n)$  :

$$J \frac{d^2 \theta_n}{dt^2} = -C(\theta_n - \theta_{n-1}) + C(\theta_{n+1} - \theta_n) - mgL \sin(\theta_n).$$

Approximation des petits angles :  $\sin(\theta_n) \approx \theta_n$ .

$$J \frac{d^2 \theta_n}{dt^2} = -C (2\theta_n - \theta_{n+1} - \theta_{n-1}) - mgL \theta_n$$

Passage à la limite continue ( $\theta(x,t)$ ) :

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = + Ca^2 \frac{\delta^2 \theta}{\delta x^2} - mgL \theta$$

$$\frac{\delta^2 \theta}{\delta x^2} - \frac{J}{Ca^2} \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \frac{mgL}{Ca^2} \theta = 0$$

Ainsi, on en déduit l'équation de Klein-Gordon :

$$\frac{\delta^2 \theta}{\delta x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2 \theta}{\delta t^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \theta = 0$$

$$\text{où } \omega_p^2 = \frac{mgL}{J}, \quad \frac{1}{c^2} = \frac{J}{Ca^2}$$

et  $\omega_p$  est la pulsation propre.

## II. Propagation d'une OPPM dans un milieu linéaire

### 1. Linéarité

Ces deux équations aux dérivées partielles sont linéaires.

On peut appliquer le principe de superposition.

Contre-exemple :  $\sin(\theta) \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!}$  ne serait plus linéaire.

Dorénavant, on supposera toujours la linéarité.

## 2. Relation de dispersion

La linéarité permet d'utiliser la notation complexe.

Notons  $\underline{f}(x, t) = \underline{A} e^{j(kx - \omega t)}$  une solution de ces équations.

On postule :

\*  $\underline{A} = |A| e^{j\varphi}$

\*  $\omega \in \mathbb{R}^+$

\*  $k \in \mathbb{C}$

On reporte dans l'équation d'onde.

\* Télégraphistes :  $(jk)^2 \underline{f} - \Lambda^2 (-j\omega)^2 \underline{f} - (r\Lambda + g\Lambda)(-j\omega) \underline{f} - rg \underline{f} = 0$

$$k^2 = \Lambda^2 \omega^2 + j\omega(r\Lambda + g\Lambda) - rg$$

\* Klein-Gordon :  $(jk)^2 \underline{f} - \frac{1}{c^2} (-j\omega)^2 \underline{f} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \underline{f} = 0$

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

N.B. : on n'a pas toujours  $k^2$



Une OPH  $\underline{f}$  est solution d'une équation d'onde linéaire si et seulement si  $\omega$  et  $k$  vérifient une relation de la forme  $\mathcal{R}(\omega, k) = 0$ , nommée relation de dispersion.

### 3. Rôles de $k_1 = \text{Re}(k)$ et de $k_2 = \text{Im}(k)$

En général,  $k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

On pose alors  $k = k_1 + jk_2$ .

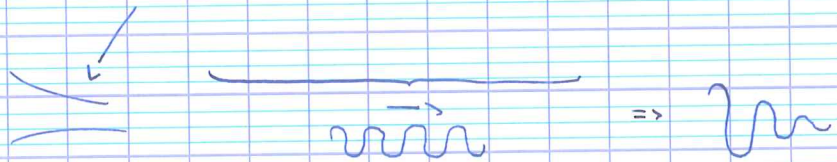
En général,  $k_1$  et  $k_2$  sont de même signe. (positifs).

On reporte :

$$\begin{aligned} \underline{f} &= |A| e^{j\varphi} e^{j(k_1 + jk_2)x - j\omega t} \\ &= |A| e^{j\varphi} e^{jk_2 x - k_2 x - j\omega t} \\ &= |A| e^{-k_2 x} e^{j(k_1 x - \omega t + \varphi)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \text{Re}(\underline{f}) \\ &= |A| e^{-k_2 x} \cos(k_1 x - \omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Ainsi,  $f = |A| e^{-k_2 x} \cos \left[ k_1 \left( x - \frac{\omega}{k_1} t \right) + \varphi \right]$ .



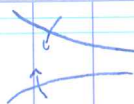
- \*  $k_1$  exprime la propagation dont la vitesse de phase est  $v_\varphi = \frac{\omega}{k_1}$ .
- \*  $k_2$  exprime l'atténuation (ou l'absorption) de l'onde.

\* Si  $k_2 < 0$ ,  $k_1 < 0$ ,

\* Cas particulier :  $k_2 = 0$  donc  $k = jk_1 \in j\mathbb{R}$ .

$f = |A| e^{-k_2 x} \cos(\omega t - \varphi)$   $\rightarrow$  c'est une onde évanescente, il n'y a pas de propagation.

N.B. :  $\frac{1}{k_2}$   
donne le longueur d'atténuation



#### 4. Longueur d'onde et dispersion

Ici, nous n'avons pas  $\lambda = \frac{c}{f}$ .

Mais, on a :  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  et  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$$

$$\text{Ainsi, } \lambda = v_p T.$$

En général,  $v_p = \frac{\omega}{k_2(\omega)}$  dépend de  $\omega$ .

→ Le milieu est alors **dispersif**.

Dans le cas de d'Alembert,  $\omega = ck$

$$k_2 = k$$

$$v_p = \frac{\omega}{k_2} = \frac{\omega}{k} = c$$

↓  
indépendant de  $\omega$ , le milieu  
n'est pas dispersif.

Lien avec l'optique :

$$v_p = \frac{c}{n}$$

Dispersif :  $n(\omega)$ ,  $n(\lambda)$

Le verre est dispersif (il disperse la lumière).

## 5. Retour aux exemples

## A. Câble coaxial

On reprend :  $k^2 = \Lambda \Gamma \omega^2 \left[ 1 + j \frac{g\Lambda + r\Gamma}{\omega \Lambda \Gamma} - \frac{g}{\Lambda \Gamma \omega^2} \right]$

$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ 1 + j \left( \frac{r}{\omega \Lambda} + \frac{g}{\omega \Gamma} \right) - \frac{r}{\omega \Lambda} \frac{g}{\omega \Gamma} \right]$

NB :  $\frac{1}{c^2} = \Lambda \Gamma$ , vitesse  
de l'onde dans  
le diélectrique

$\epsilon \ll 1, \eta \ll 1$

$k \approx \pm \frac{\omega}{c} \left[ 1 + \frac{j}{2} \left( \frac{r}{\omega \Lambda} + \frac{g}{\omega \Gamma} \right) \right]$  (on s'arrête à l'ordre 1)

$k = k_1 + jk_2$

donc  $k_1 = \pm \frac{\omega}{c}$  et  $k_2 = \frac{1}{2c} \left( \frac{r}{\Lambda} + \frac{g}{\Gamma} \right)$

$v_p = \frac{\omega}{|k_1|} = c \rightarrow$  le milieu est non dispersif (à l'ordre 1)

et  $k_2 \neq 0$ , il y a une atténuation,  $P = \frac{1}{|k_2|}$  (cf. TP).

## B. Chaîne de pendules

On reprend :  $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

\* Si  $\omega > \omega_p$ ,  $k = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$

$k_1 = k$  et  $k_2 = 0$

$\hookrightarrow$  réversible, on a pas tenu compte des frottements dans le modèle.  
(pas de forces dissipatives)

N.B.: si  $\omega = \omega_p$ ,  
 $f = \theta = A \cos(\omega t)$ ,  
ils oscillent tous en  
même temps de la même  
manière

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{|k_x|} = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

↓  
dispersif !

\* Si  $\omega < \omega_p$  :  $k = jk_z$   
 $k_z = \frac{1}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$

→ Onde évanescente.

### III. Propagation de paquets d'onde

#### 1. Paquet d'onde (ou train d'onde)

Une ODPH est définie quelque soit  $x$  et quelque soit  $t$  : elle est limitée dans le temps et dans l'espace. → irréal !

Une onde plus réaliste serait celle des FIGURES 3 et 4.

L'onde s'étend, à  $t_0$  donné, sur une largeur  $\Delta x$ . (cf. FIGURE 3)

En  $x_0$  donné, l'onde s'étend sur une durée  $\Delta t$ . (cf. FIGURE 4)

#### 2. Décomposition spectrale

N.B.: séries  $\Sigma$   
pour des fonctions périodiques  
et transformées  $\int$  pour  
les fonctions non périodiques.

Grâce aux séries et aux transformées de Fourier, toute fonction peut s'écrire comme une somme d'exponentielles complexes.



\* A  $t_0$  fixé :  $f(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx} dk$

↳ Transformée de Fourier de  $f(x, t_0)$ .

$|A(k)|$  représente le spectre

$k_0$  représente la pulsation dominante

$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$  représente la longueur d'onde dominante

$\Delta k$  est la largeur

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}, \text{ souvent } \Delta x \Delta k \approx 1.$$

Le cas limite est une OPPH :  $\Delta x \rightarrow +\infty$  et  $\Delta k \rightarrow 0$

\* A  $x_0$  fixé :  $f(x_0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega$

↳ Transformée de Fourier de  $f(x_0, t)$  (par rapport au temps)

$|A(\omega)|$  représente le spectre

$\omega_0$  représente la pulsation dominante

$\Delta \omega$  est la largeur

$$\Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2}, \text{ souvent } \Delta t \Delta \omega \approx 1$$

Le cas limite est une OPPH :  $\Delta t \rightarrow +\infty$  et  $\Delta \omega \rightarrow 0$

### 3. Propagation par décomposition spectre

On suppose ici  $k_z = 0$ .

A  $t_0$  fixé, en prenant  $t_0 = 0$ , l'onde est régie par :

$$f(x, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx} dk$$

A  $t$ , on aura :

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ik(x - v_p(k)t)} dk \end{aligned}$$

$\omega(k)$  est donné par la relation de dispersion.

Chaque OPH avance à sa vitesse  $v_p(k)$ .

Application en méthode numérique.

### 4. Vitesse de groupe

#### A. Ce qu'il faut savoir

Soit  $k_0$  la pulsation spatiale dominante d'un paquet d'onde de largeur spectrale  $\Delta k$  « assez petite », se propageant dans un milieu « pas trop » dispersif. Au fil du temps, l'enveloppe du paquet d'onde avance à la vitesse

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}(k_0)$$

Corollaire : L'énergie se déplace à  $v_e = v_g$

### 3. Un exemple pour comprendre

On considère un paquet de 2 OPH



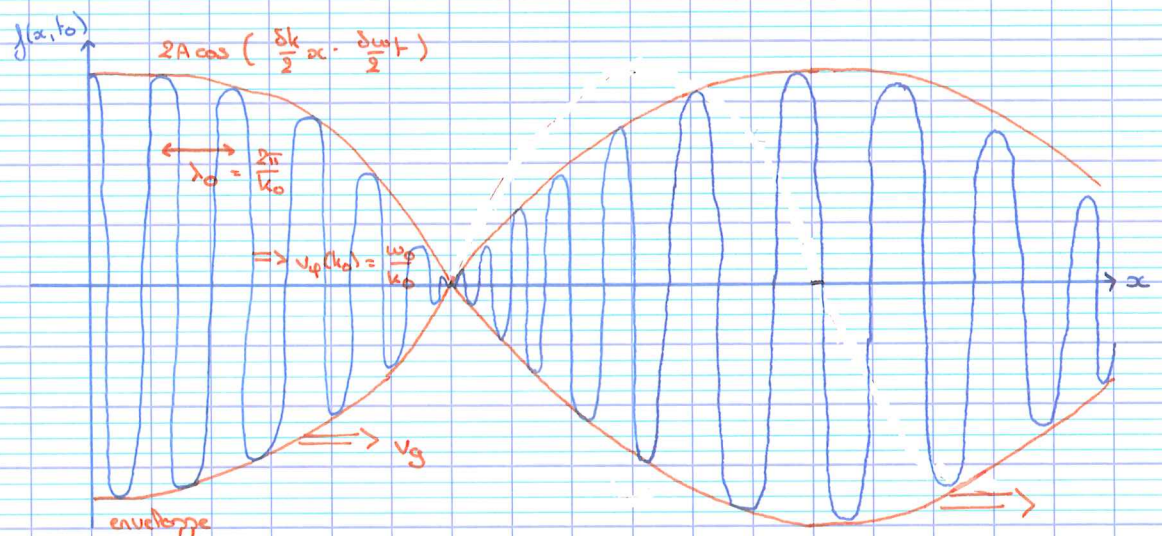
$$f(x, t) = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$\begin{array}{c} \checkmark \\ \mathcal{R}(\omega_1, k_1) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \checkmark \\ \mathcal{R}(\omega_2, k_2) = 0 \end{array}$$

$$= 2A \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{k_2 - k_1}{2} x - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$$

$$= 2A \cos(k_0 x - \omega_0 t) \cos\left(\frac{\delta k}{2} x - \frac{\delta \omega}{2} t\right)$$

$$\delta k \ll k_0 \quad \text{et} \quad \delta \omega \ll \omega_0$$



## D. Cas de la chaîne de pendules

On suppose  $\omega > \omega_p$ .

On reprend :  $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

$$\omega = \sqrt{c^2 k^2 + \omega_p^2}$$

puis on dérive...

plus pratique

$$v_g = c \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{c^2 k^2}}}$$

$$2k dk = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{v_p} = \frac{c^2}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Ainsi,  $v_g = c \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{c^2 k^2}}}$

$$v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Exemple de propagation : (cf. FIGURE 5)

A.N.  $\lambda_0 = 10 \text{ m}$ ,  $c = 1 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\omega_p = 1 \text{ rad.s}^{-1}$

$$v_g = 0,53 \text{ m.s}^{-1}$$

N.B. : si  $v_p > v_g$ ,

on voit bien les

sinusoïdes se déplacer

plus vite que l'enveloppe.

Le paquet d'onde avance à la vitesse de groupe, il s'étale à cause de la dispersion.

**Remarque** : dans un milieu non dispersif

$$\frac{\omega}{k} = c = \text{cste} \quad \text{donc} \quad \omega = ck$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c = v_p$$