CHAPITRE 23 : ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS LA MATIERE CONDUCTRICE

I. Propagation d'une OEM dans un conducteur ohmique

1. Hypothèses et domaine de fréquences considéré

Loi d'Ohm : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

D'après le modèle de Drude : $\gamma = \dfrac{ne^2 \tau}{m}$

Cette relation est valable si $T \gg \tau$

i.e. $f \gg \dfrac{1}{\tau} \simeq 10^{14}$ Hz. (pour le cuivre)

Si cette condition est violée, alors Drude devient :

$$\underbrace{m \frac{dv}{dt}}_{\text{n'est plus négligeable}} = -e\vec{E} - m\frac{\vec{v}}{\tau} \qquad (D)$$

En RSF : $m(-i\omega)\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}} - \dfrac{m\underline{\vec{v}}}{\tau}$

$\underline{\vec{v}} = \dfrac{-e\vec{E}/m}{1/\tau - i\omega}$ donc $\underline{\vec{j}} = ne\underline{\vec{v}} = \dfrac{\frac{ne^2 \underline{\vec{E}}}{m}}{1/\tau - i\omega}$

Il convient alors de définir une conductivité complexe :

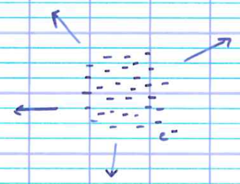
$$\boxed{\underline{\gamma} = \frac{ne^2/m}{1/\tau - i\omega}}$$

Si $\omega \ll \frac{1}{\tau}$, on retrouve $\underline{\gamma} = \frac{ne^2\tau}{m} = \gamma \in \mathbb{R}$.

Dans la suite, on considère $\gamma \in \mathbb{R}$.

2. Neutralité

$$\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$



excès d'e-

↳ ils se repoussent et s'accumulent en surface.

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

$$\mathrm{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

N.B. : Arnaque ! Sur des temps aussi courts, il faudrait utiliser $\underline{\gamma}$ complexe ou l'équation (2).

Alors, $\gamma\,\mathrm{div}(\vec{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

donc $\frac{\partial \rho}{\partial t}$

On note $\tau_0 = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$ le temps de relaxation des charges.

On en déduit : $\rho(M,t) = \rho(M,0)\,e^{-t/\tau_0}$

A.N. pour le cuivre : $\tau_0 = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \simeq 10^{-19}$ s.

La relaxation des charges est très rapide !

N.B. : En réalité, $\tau_0 \simeq 10^{-13}$ s

Dans la suite, on considère $\rho = 0$.

3. Approximation du « bon conducteur »

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \qquad \vec{j_d} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

OdG en RSF :

$$\|\vec{j}\| \sim \gamma E_0 \qquad \|\vec{j_d}\| \sim \varepsilon_0 \omega E_0$$

$$\frac{\|\vec{j_d}\|}{\|\vec{j}\|} \sim \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma} = \omega \tau_0 < 10^{-4}$$

$$\tau_0 \simeq 10^{-19}\ \text{s} \qquad \omega = 2\pi f \qquad f : 10^{14}\ \text{Hz}$$

N.B. : les métaux sont des bons conducteurs.

Dans un « bon conducteur », on peut négliger $\vec{j_d}$ devant $\vec{j}$ jusqu'à d'assez grandes fréquences. (limite $\sim 10^{14}$ Hz).

div (E)

div (B

$$\text{div}(\vec{E}) = 0$$
$$\text{div}(\vec{B}) = 0$$
$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}.$$

donc $$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{E})) = -\vec{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

donc $$\underbrace{\vec{\text{grad}}(\overbrace{\text{div}(\vec{E})}^{0})}_{\vec{0}} - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}}(\vec{B}))$$
$$= -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \vec{j})$$
$$= -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\rightarrow$

Ainsi, $\vec{\underline{E}}$ vérifie l'équation de la diffusion :

$$\boxed{\Delta\vec{\underline{E}} - \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{\underline{E}}}{\partial t} = \vec{0}}$$

On peut montrer que $\vec{B}$ vérifie la même équation.

Chercherons des solutions en termes d'ondes

$$\vec{\underline{E}} = \underline{E_0}\, e^{i(\vec{k}.\vec{OM} - \omega t)}$$

$$= \underline{E_0}\, e^{i(kx - \omega t)} \quad (\text{on prend } \vec{k} = k\vec{u_x} \;;\; k \in \mathbb{C}).$$

$$(ik)^2\vec{\underline{E}} = -\mu_0\gamma(-i\omega)\vec{\underline{E}} = \vec{0}$$

Ainsi, on en déduit : $k^2 = i\omega\mu_0\gamma$.

5. Interprétation : effet de peau

$i = e^{i\pi/2}$

i a pour racines $\pm e^{i\pi/4} = \pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

donc $k = \pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu_0\gamma\omega}$.

$\rightarrow$

Ainsi, on pose δ la longueur d'atténuation des ondes :

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}} \quad \text{et} \quad k = \pm\frac{1+i}{\delta}.}$$

On pose $k = k_1 + ik_2$ où $k_1 = k_2 = \pm \frac{1}{\delta}$.

Pour l'onde se déplaçant vers les $x \nearrow$:

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}}\, e^{i\left(\frac{1+i}{\delta}x - \omega t\right)}$$

$$= \underbrace{\underline{\vec{E_0}}\, e^{-x/\delta}}_{\substack{\text{atténuation} \\ \text{longueur } \delta}} \underbrace{e^{i\left(\frac{x}{\delta} - \omega t\right)}}_{\substack{\text{propagation} \\ v_\varphi = \omega\delta}}.$$

A.N. Cu $\gamma = 6.10^7$ S.m^{-1}

$f = 50$ Hz $\longrightarrow$ $\delta = 1$ cm

$f = 50$ MHz $\longrightarrow$ $\delta = 10$ μm.

Animation effet de peau. (cf. FIGURE 1)

L'effet de peau concerne aussi le courant dans les fils électriques.

Le courant s'y concentre à la surface.

Des variations sinusoïdales de température provoquent le même effet, c'est l'effet de cave.

6. Aspect énergétique

* $p = \vec{j}\cdot\vec{E} = \gamma E^2 = \gamma E_0^2\, e^{-2x/\delta} \cos^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$

$\longrightarrow$ Le métal s'échauffe.

* $\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\vec{rot}(\underline{\vec{E}}) = ik\vec{u_x} \wedge \underline{\vec{E}}$$

$$= i\,\frac{1+i}{\delta}\,\underline{\vec{E_0}}\, e^{i(kx - \omega t)}$$

donc $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{rot}(\vec{E})$

$= -i \dfrac{1+i}{\delta} \vec{E_0} e^{i(\underline{k}x - \omega t)}$

$\vec{B} = \dfrac{1+i}{\delta\omega} \vec{E_0} e^{i(\underline{k}x - \omega t)}$

$= \dfrac{1+i}{\delta\omega} \vec{E_0} e^{i(\frac{1+i}{\delta}x - \omega t)}$

$= \dfrac{1+i}{\delta\omega} e^{-x/\delta} e^{i(\frac{x}{\delta} - \omega t)} \vec{E_0}$

donc $\vec{B} = \dfrac{\vec{E_0}}{\delta\omega} e^{-x/\delta} \left(\cos\left(\frac{x}{\delta} - \omega t\right) - \sin\left(\frac{x}{\delta} - \omega t\right) \right).$

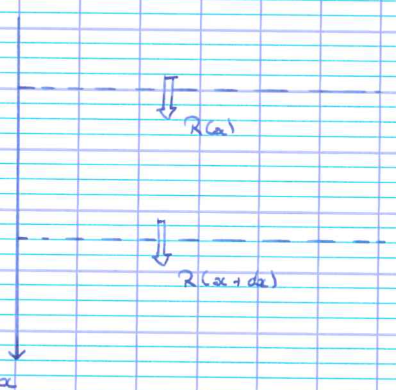
$\vec{R} =$

On choisit $\vec{E_0} = E_0 \vec{u_y}$

$\vec{R} = \dfrac{E_0^2}{\mu_0 \delta\omega} e^{-2x/\delta} \vec{u_x} \left(\cos^2\left(\frac{x}{\delta} - \omega t\right) - \sin\left(\frac{x}{\delta} - \omega t\right)\cos\left(\frac{x}{\delta} - \omega t\right) \right).$

$\langle \vec{R} \rangle = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{E_0^2}{\mu_0 \delta\omega} e^{-2x/\delta} \vec{u_x}.$

- Bilan :



Vérifier que $S(R(x) - R(x+dx)) = p S dx$

II. Propagation d'une OEM dans un plasma dilué et froid

1. Hypothèses d'étude

Définition : Un plasma est un gaz partiellement (ou totalement) ionisé.
C'est un gaz formé d'électrons libres et d'ions.

Exemple : ionosphère.

Notons n le nombre d'électrons par unité de volume. (OdG : $n \sim 10^{11}\ m^{-3}$).

Hypothèses :

- pas de collision e^-/e^-, ni e^-/ion. (plasma dilué)
- pas d'agitation thermique, $v_{th} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$ négligé (plasma froid).
- ions lourds donc presque immobiles.
- $v(e^-) \ll v_\varphi \simeq c$. (les électrons sont non relativistes)

2. Conductivité complexe du plasma

* $\vec{F_m} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$

$|\vec{F_m}| < evB \ll ecB \simeq eE$

N.B. : dans le vide, on a $E = cB$, on admet cette relation ici en OdG.

* $\vec{F_{el}} = -e\vec{E}$

$|\vec{F_{el}}| = eE$

donc $F_m \ll F_{el}$.

PFD appliqué aux électrons : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$.

En RSF : $m(-i\omega)\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}}$

donc $\underline{\vec{v}} = \dfrac{e\underline{\vec{E}}}{im\omega}$

$$\underline{\vec{j}} = -ne\underline{\vec{v}} = \frac{-ne^2}{im\omega}\underline{\vec{E}}$$

Ainsi, la **conductivité complexe** pour les plasmas est définie par :

$$\boxed{\underline{\gamma} = \frac{ine^2}{m\omega}.}$$

Remarque :

* En M donné, $\vec{j}(M,t)$ et $\vec{E}(M,t)$

Mais, e^- en mouvement

On peut alors considérer en permanence un nouvel électron en M.

On utilise donc $\dfrac{D\vec{v}}{Dt}$.

Néanmoins, on peut confondre $\dfrac{D\vec{v}}{Dt}$ et $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ grâce à $v \ll v_\varphi$.

3. Echanges énergétiques entre le champ et la matière

(cf. FIGURE 2)

$$p = \vec{j}\cdot\vec{E}$$

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{j}}\cdot\underline{\vec{E}}^*\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\underline{\gamma}\,\underbrace{\underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{E}}^*}_{\in\mathbb{R}}\right)$$

Ainsi, $\langle p \rangle = 0$.

En moyenne, dans un plasma, le champ ne cède pas d'énergie à la matière.

(cohérent avec l'absence de collision)

On le voit bien sur la figure : force et vitesse sont en quadrature, d'où, en moyenne, un produit nul.

4. Neutralité du plasma et transversalité de l'OEM ??H

$$\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{j} = \gamma \vec{E} \qquad \mathrm{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Alors, $\gamma\, \mathrm{div}(\vec{E}) - i\omega\rho = 0$

donc $\dfrac{\gamma\rho}{\varepsilon_0} - i\omega\rho = 0$

donc $\rho \underbrace{\left(\dfrac{\gamma}{\varepsilon_0} - i\omega\right)}_{\text{s'annule ssi } \frac{\gamma}{\varepsilon_0} = i\omega} = 0$

i.e. ssi $\dfrac{ine^2}{m\omega\varepsilon_0} = i\omega$

i.e. ssi

Ainsi, on note ω_p la pulsation de plasma, définie par :

$$\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}}$$

C'est la pulsation propre du plasma, c'est la pulsation naturelle des oscillations des charges.

Dans la suite, $\omega \neq \omega_p$.

donc $\rho = 0$.

MG : $\mathrm{div}(\underline{\vec{E}}) = 0$

OPPH $\mathbb{C}$: $\vec{k} = k\vec{u}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\in \mathbb{C}$.

$i\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$

donc $ik\vec{u} \cdot \vec{E} = 0$

donc $\vec{u} \cdot \vec{E} = 0$

Ainsi, l'onde est transverse.

Remarque : Si l'on suppose l'onde transverse, alors $\rho = 0$ directement.

5. Equation d'onde et relation de dispersion

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

donc $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E})) = -\vec{\mathrm{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$

donc $\vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}(\vec{E})) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B}))$.

donc $\Delta\vec{E} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \vec{0}$

donc $\Delta\vec{E} - \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$.

En notation complexe, $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\,\underline{\vec{E}} = \frac{ine^2}{m\omega}\underline{\vec{E}}$.

Ainsi, on obtient l'équation d'onde pour les plasmas :

$$\boxed{\Delta\underline{\vec{E}} - \mu_0 \frac{ine^2}{m\omega}\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0}.}$$

$\rightarrow$

Pour une OPPH $\mathbb{C}$:

$$-k^2 \underline{\vec{E}} - \mu_0 \frac{ine^2}{m\omega}(-i\omega \underline{\vec{E}}) + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\vec{E}} = \vec{0}$$

donc $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\mu_0 n e^2}{m}$

$$= \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{ne^2}{\varepsilon_0 c^2 m}.$$

Ainsi, on obtient la relation de dispersion pour les plasmas :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

6. Cas où $\omega > \omega_p$

Alors, $k^2 > 0$.

$$k = \pm\sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

$k \in \mathbb{R}$, il n'y a pas d'atténuation.

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \vec{u_y} e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\vec{E} = E_0 \vec{u_y} \cos(kx - \omega t)$$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{|k|} = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}.$$

Ainsi,

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} .$$

Le plasma est donc un milieu dispersif.

On différencie : $2k\,dk = \frac{2\omega}{c^2}\,d\omega$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi}$$

Ainsi, la vitesse de groupe dans le plasma s'exprime par :

$$\boxed{v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} .$$

Graphe. (cf. FIGURE 4)

$v_g < c$: OK, en lien avec la relativité restreinte.

Application : $\exists$ délai ionosphérique pour les signaux allant d'un satellite à la Terre.

7. Cas où $\omega < \omega_p$ (domaine « réactif »)

A. Caractère évanescent

Alors, $k^2 < 0$.

$$k = \pm i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega}{c^2}} = \pm i k_2 \in i\mathbb{R} .$$

$$\vec{E} = E_0 \vec{u_y} e^{i(kx - \omega t)}$$
$$= E_0 \vec{u_y} e^{\pm k_2 x - i\omega t}$$

donc $\vec{E} = E_0 u_y e^{\pm k_2 x} \cos(\omega t)$ $\qquad \delta = \frac{1}{k_2}$.

C'est une onde évanescente.

3. Expression de $\vec{B}$

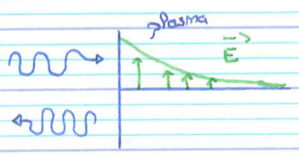
$$\vec{rot}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial E}{\partial x} \vec{u_z}$$
$$= -k_2 E_0 e^{-k_2 x} \cos(\omega t) \vec{u_z}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\vec{rot}(\vec{E}) = k_2 E_0 e^{-k_2 x} \cos(\omega t) \vec{u_z}$$

Ainsi, $\vec{B} = \frac{k_2 E_0}{\omega} e^{-k_2 x} \sin(\omega t) \vec{u_z}$.



Contrairement au vide $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en quadrature.

C. Transport de l'énergie

$$\vec{R} = \frac{E_0^2 k_2}{\omega \mu_0} e^{-2k_2 x} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \vec{u_x}.$$

$\langle \vec{R} \rangle = 0$, une onde évanescente ne transporte pas d'énergie.

III. Généralisation, indice optique

1. Equation d'onde

$\vec{j} = \gamma \vec{E}$ $\qquad \rho = 0$

$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) =$

donc $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{E})) =$

$\overrightarrow{grad}(\underbrace{div(\vec{E})}_{0}) - \Delta\vec{E} =$

donc $\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

2. Relation de dispersion

$\vec{E} = \vec{E_0} e^{i(kx - \omega t)}$

donc $-k^2 \vec{E} - \mu_0 \gamma (-i\omega) \vec{E} - \frac{1}{c^2}(-\omega^2)\vec{E} = \vec{0}$

Ainsi, $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \mu_0 \gamma(\omega) i\omega$.

3. Vitesse de phase et indice complexe

$\underline{k} = k_1 + ik_2$.

$v_\varphi = \frac{\omega}{|k_1|}$

Atténuation : $\delta = \frac{1}{k_2}$.

On définit l'indice complexe $\underline{n}$ tel que :

$$\underline{k} = \underline{n}\,\frac{\omega}{c} .$$

On peut écrire : $\underline{n} = n' + in''$

avec $k_1 = n'\,\frac{\omega}{c}$

$k_2 = n''\,\frac{\omega}{c}$.

$v_\varphi = \frac{\omega}{k_1} = \frac{c}{n'}$ n' est l'indice de réfraction.

n'', lié à k_2, est l'indice d'extinction.

Dans un matériau transparent, $n'' = 0$, $\underline{n} \in \mathbb{R}$.

Dans le cas du métal et dans celui du plasma,

4. Cas d'un isolant DLHI

DLHI : Diélectrique Linéaire Homogène Isotrope

Sous l'effet d'un champ $\vec{E}$ alternatif, les atomes ou les molécules se polarisent de manière ~~oscil~~ alternative et les nuages électroniques oscillent. On peut les considérer comme de minuscules courants électriques.

On introduit une permittivité relative ε_r qui dépend de ω, elle est sans dimension.

$$\Delta \vec{\underline{E}} - \mu_0 \varepsilon_0 \underline{\varepsilon_r} \frac{\partial^2 \vec{\underline{E}}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

Ainsi, $\underline{k}^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \underline{\varepsilon_r} \omega^2 = \underline{\varepsilon_r} \frac{\omega^2}{c^2}$.

Comme $\underline{k}^2 = \underline{n}^2 \frac{\omega^2}{c^2}$, on en déduit : $\underline{n}^2 = \underline{\varepsilon_r}$.

5. Aspect énergétique

On prend : $\vec{\underline{E}} = E_0 \vec{u_y} e^{i(\underline{k}x - \omega t)}$ où $\underline{k} = k_1 + ik_2$.

$$\vec{\underline{E}} = E_0 \vec{u_y} e^{-k_2 x} e^{i(k_1 x - \omega t)}.$$

$$\vec{E} = E_0 \vec{u_y} e^{-k_2 x} \cos(k_1 x - \omega t),$$

$\vec{\nabla} \to i\underline{k}\vec{u_x}$

$\vec{rot}(\vec{\underline{E}}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\underline{E}}$

$= i\underline{k}\, E_0 \vec{u_z}\, e^{-k_2 x}\, e^{i(k_1 x - \omega t)}$

$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -\vec{rot}(\vec{\underline{E}})$

donc $\vec{\underline{B}} = \frac{\underline{k}}{\omega} E_0 \vec{u_z}\, e^{-k_2 x}\, e^{i(k_1 x - \omega t)}$

N.B. : $\vec{\underline{B}}^* = \frac{\underline{k}^*}{\omega} E_0 \vec{u_z} e^{-k_2 x} e^{-i(k_1 x - \omega t)}$

$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} Re\left(\frac{\vec{\underline{E}} \wedge \vec{\underline{B}}^*}{\mu_0} \right)$

$= \frac{1}{2\mu_0} Re\left(E_0^2 e^{-2k_2 x} \frac{\underline{k}^*}{\omega} \vec{u_x} \right)$

$= \frac{1}{2\mu_0 \omega} E_0^2 k_1 e^{-2k_2 x} \vec{u_x}$

$= \frac{1}{2\mu_0} \frac{n'}{c} E_0^2 e^{-2n'' \frac{\omega}{c} x} \vec{u_x}$.

N.B. : $k_1 = n' \frac{\omega}{c}$

$I = \frac{1}{2\mu_0} \frac{n'}{c} E_0^2 e^{-2n'' \frac{\omega}{c} x}$.

$\log(I)$ varie en $-\alpha x$

↳ Loi de Beer-Lambert.

N.B. : Attention, si $E_0 \in \mathbb{C}$, il faut écrire $\underline{E_0}\,\underline{E_0}^*$ au lieu de E_0^2.

COMPLEMENT : VITESSE DE L'ENERGIE DANS UN PLASMA

Relation de dispersion : $c^2k^2 = \omega^2 - \omega_p^2$.

Ici, $\omega > \omega_p$.

On rappelle :

* $\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t)\,\vec{u_y}$
* $\vec{B} = \dfrac{E_0}{v_\varphi} \cos(kx - \omega t)\,\vec{u_z}$.

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{4} E_0^2 \left(\varepsilon_0 + \frac{1}{\mu_0 v_\varphi^2} \right).$$

$$= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \left(1 + \frac{c^2k^2}{\omega^2} \right)$$

$$= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \left(2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

Par ailleurs, $e_c = \frac{1}{2} m v^2 n$

or $j = nqv$

donc $v = \dfrac{j}{nq}$

donc $e_c = \dfrac{1}{2} m n \left(\dfrac{j}{nq} \right)^2$

$= \dfrac{1}{2} m \dfrac{j^2}{nq^2}$.

$$\langle e_c \rangle = \frac{1}{2} m \frac{j j^*}{nq^2}$$

$$= \frac{m}{2nq^2} \left(\frac{\gamma E \, \gamma^* E^*}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m}{nq^2} \frac{|\gamma|^2}{2} E_0^2.$$

donc $\langle e_c \rangle = \frac{1}{4} \frac{m}{nq^2} E_0^2 \left(\frac{nq^2}{m\omega}\right)^2$

$= \frac{1}{4} \frac{E_0^2}{m} \frac{nq^2}{\omega^2}$.

$\langle R \rangle = u_{tot} \, v_{energie}$.

Finalement, on trouve $v_{énergie} = v_g$.