

CHAPITRE 24 : PASSAGE D'UNE INTERFACE PAR UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE

I. Interface entre deux milieux linéaires

1. Situation étudiée

(cf. FIGURE 1)

Rappel : $\underline{k} = n \frac{c}{c_0} \underline{\alpha}$

On se restreint à $\underline{E}_0 = E_0 \underline{e}_y$.

* $\underline{E}_i = \underline{E}_0 e^{i(k_1 x - \omega t)}$ où $\underline{k}_1 = n_1 \frac{c}{c_0} \underline{\alpha}$.

Maxwell-Faraday : $i \underline{k}_1 \underline{u}_\alpha \wedge \underline{E}_i = -(-i\omega \underline{B}_i)$

$$\underline{B}_i = \frac{k_1}{\omega} \underline{u}_\alpha \wedge \underline{E}_i$$

$$\underline{B}_i = \frac{n_1}{c} E_0 e^{i(k_1 x - \omega t)} \underline{u}_z$$

* $\underline{E}_r = \underline{E}_0 r \underline{u}_y e^{i(-k_2 x - \omega t)}$

Maxwell-Faraday : $-i \underline{k}_2 \underline{u}_\alpha \wedge \underline{E}_r = -(-i\omega \underline{B}_r)$

donc $\underline{B}_r = -\frac{n_2}{c} \underline{E}_0 r \underline{u}_z e^{i(-k_2 x - \omega t)}$

* $\underline{B}_t = \frac{n_2}{c} \underline{E}_0 t e^{i(k_2 x - \omega t)} \underline{u}_z$

2. Coefficients de réflexion et de transmission pour \vec{E}

On définit le coefficient de réflexion et le coefficient de transmission pour \vec{E} par :

$$\underline{\Gamma} = \frac{\underline{E}_r(\mathcal{D}, t)}{\underline{E}_i(\mathcal{D}, t)} \quad \text{et} \quad \underline{G} = \frac{\underline{E}_t(\mathcal{D}, t)}{\underline{E}_i(\mathcal{D}, t)}$$

On les cherche en fonction de n_1 et n_2 .

En incidence normale, on admet que les champs \vec{E} et \vec{B} sont continus.

$$* \quad \underline{E}_i(\mathcal{D}, t) + \underline{E}_r(\mathcal{D}, t) = \underline{E}_t(\mathcal{D}, t)$$

$$\text{donc} \quad 1 + \underline{\Gamma} = \underline{G}$$

$$* \quad \underline{B}_i(\mathcal{D}, t) + \underline{B}_r(\mathcal{D}, t) = \underline{B}_t(\mathcal{D}, t)$$

$$\frac{n_1}{c} \underline{E}_i(\mathcal{D}, t) - \frac{n_1}{c} \underline{E}_r(\mathcal{D}, t) = \frac{n_2}{c} \underline{E}_t(\mathcal{D}, t)$$

$$\text{donc} \quad 1 - \underline{\Gamma} = \frac{n_2}{n_1} \underline{G}$$

Ainsi, on peut exprimer $\underline{\Gamma}$ et \underline{G} par :

$$\underline{\Gamma} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad \underline{G} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

N.B. : Les indices

sont inversés par

rapport à l'acoustique.

3. Cas d'une interface entre le vide et un plasma

Dans le vide, $n_{\text{vide}} = 1$. Ici, on note $n_{\text{vide}} = n_1$.

A. Dans le domaine de transparence ($\omega > \omega_p$)

N.B.: $n_2 = n_{\text{plasma}}$

D'après le chapitre précédent, $k_2 = n_2 \frac{\omega}{c}$ où $n_2 = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

$$r = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{T}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

Ici: $(r, \underline{\underline{T}}) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

L'onde est réfléchie et transmise sans décalage.

On détermine: (d'après les formules du chapitre précédent)

$$\ast \langle R_i \rangle = \frac{E_{0i}^2}{2\mu_0 c}$$

$$\ast \langle R_r \rangle = \frac{E_{0r}^2}{2\mu_0 c}$$

$$\ast \langle R_t \rangle = \frac{E_{0t}^2 n_2}{2\mu_0 c}$$

Ici,

$$R = r^2$$

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^2 n_2$$

On définit le coefficient de réflexion et le coefficient de transmission pour la puissance par :



$$R = \frac{| \langle R_r \rangle |}{\langle R_i \rangle}$$

$$\underline{\underline{T}} = \frac{\langle R_t \rangle}{\langle R_i \rangle}$$

3. Dans le domaine réactif ($\omega < \omega_p$)

D'après le chapitre précédent, $n_2 = i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} = i n_2''$.

$$\Gamma = \frac{1 - i n_2''}{1 + i n_2''} \quad \text{et} \quad \underline{\Gamma} = \frac{2}{1 + i n_2''} = |\underline{\Gamma}| e^{i\theta}$$
$$= |\underline{\Gamma}| e^{i\theta}$$

Il y a un décalage à la réflexion et à la transmission.

On détermine :

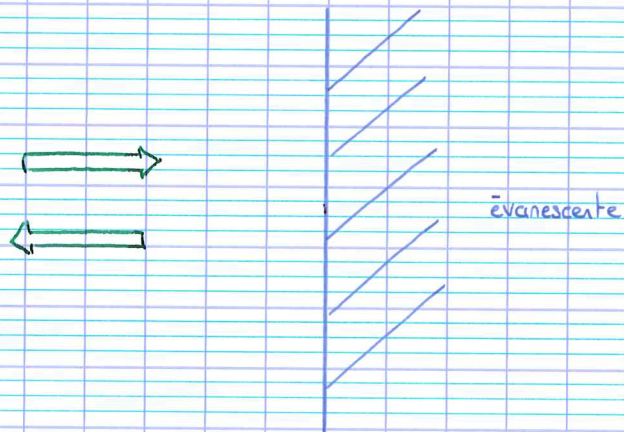
$$* \langle R_i \rangle = \frac{E_o E_o^*}{2\mu_0 c}$$

$$* \langle R_r \rangle = \frac{E_{or} E_{or}^*}{2\mu_0 c}$$

$$* \langle R_t \rangle = 0 \quad (\text{car l'onde est évanescente}).$$

$$\text{Ainsi, } \underline{T} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{R} = \underline{\Gamma \Gamma^*} = 1$$

Toute la puissance incidente est réfléchie.



4. Cas d'une interface entre le vide et un métal à basse fréquence

On a :

* $n_{\text{vide}} = n_1 = 1$

* $n_{\text{métal}} = n_2 = n_2' + in_2''$ avec $n_2' = n_2'' = \frac{c}{\delta\omega}$

où δ est l'épaisseur de peau.

* $\underline{r} = \frac{1 - \frac{c}{\delta\omega} - i \frac{c}{\delta\omega}}{1 + \frac{c}{\delta\omega} + i \frac{c}{\delta\omega}} = |\underline{r}| e^{i\gamma}$

* $|\underline{t}| = \frac{2}{1 + \frac{c}{\delta\omega} + i \frac{c}{\delta\omega}} = |\underline{t}| e^{i\theta}$

Preons $E_0 \in \mathbb{R}$.

$$E_{0r} = \underline{r} E_0 = |\underline{r}| e^{i\gamma} E_0$$

$$\underline{E}_r = |\underline{r}| e^{i\gamma} E_0 e^{i(-k_1 x - \omega t)}$$

$$\text{Re}(\underline{E}_r) = |\underline{r}| E_0 \cos(k_1 x + \omega t - \gamma)$$

$$E_{0t} = \underline{t} E_0 = |\underline{t}| e^{i\theta} E_0$$

$$\underline{E}_t = |\underline{t}| e^{i\theta} E_0 e^{i(k_2 x - \omega t)}$$

où $k_2 = k_2' + ik_2''$

$$\text{Re}(\underline{E}_t) = |\underline{t}| E_0 \cos(k_2' x - \omega t + \theta) e^{-k_2'' x}$$

On détermine :

$$\langle R_i \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \quad \text{et} \quad \langle R_t \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} \underline{E}_{0r} \underline{E}_{0r}^* n_2' e^{-2n_2'' \frac{\omega}{c} x}$$

effet de peau.

Ainsi, $\underline{R} = \underline{r} \underline{r}^*$ et $\underline{T} = n_2' \underline{t} \underline{t}^*$

A.N. ω à 50Hz : $\underline{T} = 2 \cdot 10^{-6}$ et $R = 1 - T = 0,999998$

5. Cas d'une interface entre le vide et un conducteur parfait

Définition : Dans un conducteur parfait, la conductivité tend vers l'infini. ($\sigma \rightarrow +\infty$).

Alors, l'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} \rightarrow 0$.

Plus précis : $\delta \ll \lambda$.

$$\text{donc } v_\varphi = \delta \omega = \delta c \times \frac{2\pi}{\lambda} \ll c$$

$$\text{donc } n_2' = n_2'' \gg 1$$

N.B. : d'où le déphasage

Ainsi, $\underline{r} \rightarrow -1$ et $\underline{R} \rightarrow 1$.

exceptionnel de π

en optique.

On obtient le même résultat en supposant $E = 0$ sur un conducteur parfait.

6. Cas d'une interface entre deux milieux transparents

On a : $n_1 \in \mathbb{R}$ et $n_2 \in \mathbb{R}$

N.B. : $\underline{r} \in \mathbb{R}^-$, d'où

Si $n_2 > n_1$, $\underline{r} \in \mathbb{R}^-$

le déphasage exceptionnel

de π en optique.

On détermine \underline{T} en calculant $\langle R_- \rangle$ (qui comporte n_1^2) et $\langle R_+ \rangle$ (qui comporte n_2^2).

$$R = \underline{r}^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$\underline{T} = \frac{n_2}{n_1} \underline{G} \underline{G}^* = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

N.B. : pour éviter de

perdre 4% d'intensité

lumineuse à chaque

passage d'une fibre, on

A.N. air $n_1 = 1$ et verre $n_2 = 1,5$

couple le verre avec dispositif

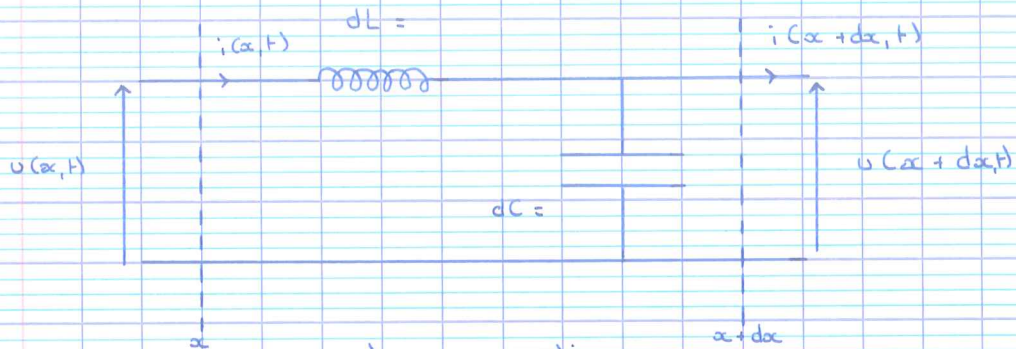
$$R = 0,04 \text{ et } \underline{T} = 0,96$$

anti-reflet.

II. Réflexion à l'extrémité d'un câble coaxial

1. Impédance caractéristique du câble

(cf. FIGURE 2)



Loi des mailles : $\frac{du}{dx} = -\Lambda \frac{di}{dt} \quad (M)$

Loi des noeuds : $\frac{di}{dx} = -\Gamma \frac{du}{dt} \quad (N)$

Pour une OPH $\alpha \nearrow$:

$$u = A \cos(\omega t - kx)$$

(M) : $kA \sin(\omega t - kx) = -\Lambda \frac{di}{dt}$

donc $i = \frac{kA}{\Lambda \omega} \cos(\omega t - kx)$

or $\frac{k}{\omega} = \frac{\Lambda}{c} = \sqrt{\Lambda \Gamma}$

donc $i = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} u$

Ainsi, on définit l'impédance caractéristique Z_c d'un câble par :

* OPH $\alpha \nearrow$: $u = Z_c i$

* OPH $\alpha \searrow$: $u = -Z_c i$

où $Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$



2. Réflexion sur une impédance terminale

$$* \underline{u} = \underbrace{A e^{j(\omega t - kx)}}_{\text{v incidente}} + B e^{j(\omega t + kx)}$$

$$* \underline{i} = \frac{A}{Z_c} e^{j(\omega t - kx)} + \frac{B}{Z_c} e^{j(\omega t + kx)}$$

$$\text{En } x = 0, \quad \underline{u}(0) = Z_0 \underline{i}(0)$$

$$\text{donc } A + B = Z_0 \frac{(A - B)}{Z_c}$$

$$\text{donc } B \left(1 + \frac{Z_0}{Z_c}\right) = A \left(\frac{Z_0}{Z_c} - 1\right)$$

$$\text{Ainsi, } \underline{\Gamma} = \frac{B}{A} = \frac{Z_0 - Z_c}{Z_0 + Z_c}$$

Si $Z_0 = Z_c$, il n'y a plus de réflexion.

3. Impédance vue en entrée

$$\underline{Z}(-L) = \frac{\underline{u}(-L)}{\underline{i}(-L)} = \frac{A e^{jkl} + B e^{-jkl}}{A e^{jkl} - B e^{-jkl}} Z_c$$

$$\text{avec } B = \underline{\Gamma} A$$

$$\text{On obtient : } \underline{Z}(-L) = Z_c \frac{Z_0 \cos(kL) + j Z_c \sin(kL)}{j Z_0 \sin(kL) + Z_c \cos(kL)}$$

$\underline{Z}(-L)$ est l'impédance que voit le générateur.

4. Excitation par un GSF et résonances

On observe $\underline{u}(-L)$.

On fait varier f, ω, k .

On cherche des maximums.

$$\bullet \underline{u}(-L) = \underline{E} - Z_0 \underline{i}(-L)$$

$$\bullet \underline{i}(-L) = \frac{\underline{u}(-L)}{\underline{Z}(-L)}$$

$$\text{donc } \underline{u}(-L) = \underline{E} - Z_0 \frac{\underline{u}(-L)}{\underline{Z}(-L)}$$

$$\text{Ainsi, } \underline{u}(-L) = \frac{\underline{E}}{1 + \frac{Z_0}{\underline{Z}(-L)}}$$

* Cas : sortie ouverte

$$Z_0 \rightarrow +\infty$$

$$\underline{Z}(-L) \rightarrow \frac{Z_c}{j \tan(kL)}$$

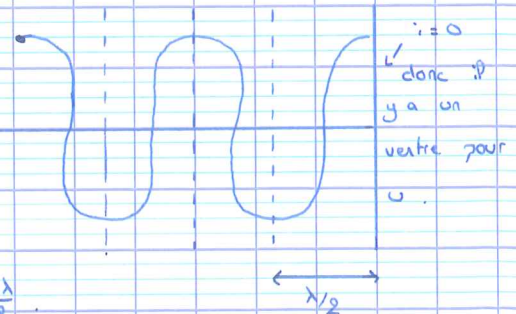
$$\underline{u}(-L) \rightarrow \frac{\underline{E}}{1 + \frac{Z_0}{Z_c} j \tan(kL)}$$

\Rightarrow y a résonance lorsque $\tan(kL) = 0$.

$$\text{i.e. } kL = n\pi \quad \text{où } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{i.e. } k = \frac{n\pi}{L}$$

$$\text{i.e. } f = \frac{ck}{2\pi} = \frac{nc}{2L}$$



$$L = n \frac{\lambda}{2}$$

$$\lambda/2$$

N.B. : situation

hors ARQS !

$i = i(x, t)$.

