

CHAPITRE 29 : FAISCEAUX GAUSSIENS

1. Description d'un faisceau laser

1. Une onde ni vraiment plane, ni vraiment sphérique

(cf. FIGURE 1 et FIGURE 2)

A cause des miroirs qui forment la cavité, les surfaces d'ondes ont une forme spéciale.

N.B.: θ est la divergence angulaire

Typiquement, $w_0 \approx 1 \text{ mm}$ et $\theta \approx 1' = \frac{1}{60}^\circ$

Pour une onde plane, $\underline{s} = s_0 e^{i(kz - \omega t)}$.

On a des plans d'onde.

Une telle onde est illimitée latéralement, alors que le laser est limité à w_0 .

Pour une onde sphérique, $\underline{s} = \frac{k}{\omega} e^{i(k \cdot \underline{OM} - \omega t)}$

Une telle onde couvre toutes les directions, alors que

le laser couvre θ .



Le laser est donc ni vraiment une onde plane, ni vraiment une onde sphérique.

Dans un laser, il semble y avoir un bout d'onde plan et un bout d'onde sphérique.

2. Limitation latérale et divergence angulaire

(cf. FIGURE 3)

N.B. : $\sin(\theta) \approx \frac{\lambda}{a}$

La théorie de la diffraction nous donne : $\theta \approx \frac{\lambda}{a}$

De même, dans un laser, $\theta \approx \frac{\lambda}{w_0}$

Dans les deux cas, c'est une conséquence de l'équation de d'Alembert.

II. Structure d'un faisceau gaussien

1. Expression du scalaire optique

Une solution approximative de l'équation de d'Alembert est :

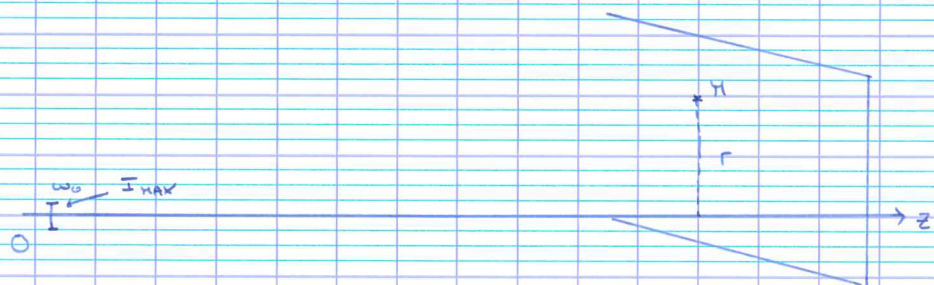
$$\underline{u}(M) = s_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}} e^{i\psi(r,z)}$$

$$\text{où } w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}$$

$$\text{où } z_R = \pi \frac{w_0^2}{\lambda}$$

$$\text{et } \psi(r,z) = kz + \frac{kr^2}{2R(z)} - \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)$$

$$\text{où } R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2}\right)$$



Notons,

- * w_0 : la largeur au col ("waist")
- * z_R : la longueur de Rayleigh
- * φ : phase de

Un faisceau couvre en général la zone où $z > 0$.

2. Rayon du faisceau

(cf. FIGURE 4)

$$|s| = s_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}}$$

$$I = \frac{1}{2} s_0^2 \frac{w_0^2}{w(z)^2} e^{-\frac{2r^2}{w(z)^2}}$$

Pour z donné, on a un comportement avec r selon une gaussienne. \rightarrow I diminue en s'écartant de l'axe.

$w(z)$ mesure la zone intense, on l'appelle le rayon du faisceau.

$$I(r=0, z) = \frac{1}{2} s_0^2 \frac{w_0^2}{w(z)^2}$$

I sera maximale lorsque $w(z)$ est minimal.

$$I(0, 0) = \frac{1}{2} s_0^2 \frac{w_0^2}{w_0^2} \quad I_{\text{MAX}} = \frac{1}{2} s_0^2$$

Puissance du faisceau :

$$P = \int I dS = \int I r dr d\theta = 2\pi \int_0^{\infty} I r dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} I_{\text{MAX}} \frac{w_0^2}{w^2} e^{-\frac{2r^2}{w^2}} r dr$$

$$= 2\pi I_{\text{MAX}} \frac{w_0^2}{w^2} \int_0^{\infty} r e^{-\frac{2r^2}{w^2}} dr$$

$$\text{donc } \mathcal{P} = 2\pi \bar{I}_{\text{max}} \frac{w_0^2}{w^2} \left[\frac{w^2}{-4} e^{-2r^2/w^2} \right]_0^{\infty}$$

$$\text{Ainsi, } \mathcal{P} = \frac{\pi}{2} w_0^2 \bar{I}_{\text{max}}$$

→ \mathcal{P} ne dépend pas de z , la puissance se conserve.

Dans le disque de rayon égal au rayon du faisceau :

$$\mathcal{P}' = \frac{\pi}{2} \bar{I}_{\text{max}} (1 - e^{-2}) w_0^2 = 0,86 \mathcal{P}$$

3. Etude des rayon $w(z)$ et de la phase $\varphi(z)$

(cf. FIGURE 5)

$$* w : z \mapsto w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}$$

- pour $z = 0$, $w = w_0$ (= w_{min}).
- $w \approx w_0$ si $z \ll z_R$.
- pour $z = z_R$, $w = \sqrt{2} w_0 \approx 1,4 w_0$
- si $z \rightarrow +\infty$, $w \sim w_0 \frac{z}{z_R}$.

$$\begin{aligned} w &= w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \\ &= \sqrt{\frac{z^2}{z_R^2}} w_0 \sqrt{1 + \frac{z_R^2}{z^2}} \\ &= \frac{|z|}{z_R} w_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{z_R^2}{z^2} + o\left(\frac{z_R^2}{z^2}\right) \right) \\ &= w_0 \frac{|z|}{z_R} + \frac{w_0}{2} \frac{z_R}{z} + o\left(\frac{z_R}{z}\right) \end{aligned}$$

La courbe admet une asymptote : $z \rightarrow w_0 \frac{|z|}{z_R} = \pm \frac{w_0}{z_R} z$

* $\psi : z \mapsto kz + \frac{kr^2}{2z(z)} - \arctan\left(\frac{r}{z}\right)$

- pour $|z| \ll z_R$:

$$\arctan\left(\frac{r}{z}\right) \rightarrow 0$$

$$R \sim \frac{z_R^2}{z}$$

$$\frac{kr^2}{2z} = \frac{kr^2 z^2}{2z z^2} \ll \frac{kr^2}{2z z}$$

Près de l'axe, $r \ll w \simeq w_0$:

$$\frac{kr^2}{2z} \ll \frac{k w_0^2}{2z \pi} = \frac{2\pi}{2\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\pi} = 1$$

$$\psi \approx kz$$

- pour $|z| \gg z_R$:

$$\psi \approx k(z^2 + r^2)^{1/2} + \overset{\text{arctan}}{\frac{1}{2} \ln} \\ \approx k0\pi + \frac{1}{2} \ln$$

4. Zone cylindrique et zone conique

* Dans la région $|z| \ll z_R$, le faisceau a une largeur constante, il ne diverge pas. C'est la zone cylindrique du faisceau.



N.B.: dans ce chapitre, on ne note pas $e^{-i\omega t}$ car ce facteur est présent dans tous les termes.

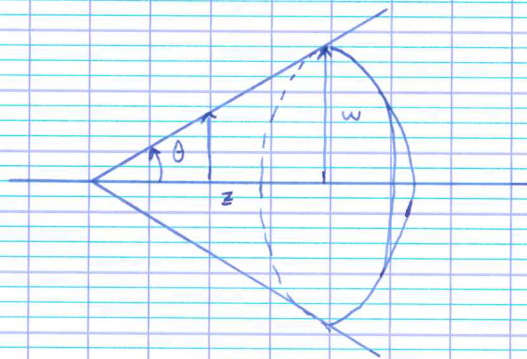
$$s = s_0 \frac{w_0}{w_0} e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} e^{ikz}$$

C'est comme une onde plane mais dont l'amplitude décroît latéralement.

Le théorème de Rayleigh donne des rayons horizontaux, le faisceau ne diverge pas.

N.B.: on prend $z \geq 0$

* Dans la région $|z| \gg z_R$, le faisceau a une largeur qui croît linéairement, il diverge dans un cône. C'est la **zone conique** du faisceau.



$$\tan(\theta) = \frac{z}{w}$$

$$\text{donc } \theta \approx \frac{w_0 z}{z_R z} = \frac{w_0}{z_R} = \frac{w_0}{\pi w_0^2 / \lambda}$$

$$\text{Ainsi, } \theta \approx \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

C'est conforme à I.2., par analogie avec la diffraction.

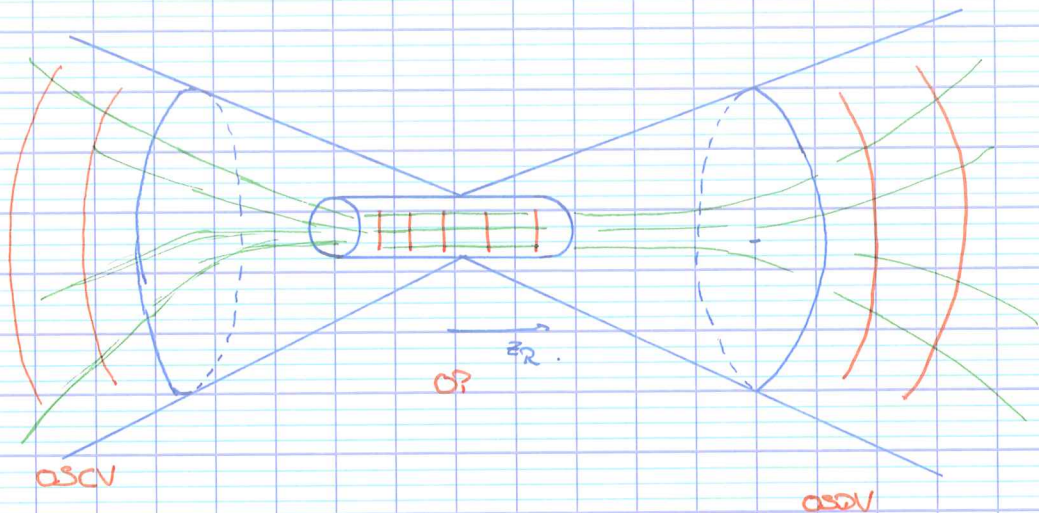
$$s = s_0 \frac{w_0}{w_0 e^{iRz}} e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} e^{ikz} e^{-i\pi/2}$$

$$z \approx 0H$$

$$s \approx \frac{e^{ikz}}{0H}$$

C'est comme une onde sphérique.
Le théorème de Malus donne que le faisceau diverge.

Conclusion : (cf. encadré)



Un laser donne la partie où $z > 0$.

N.B. : la
relation $\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}$
l'explique bien.

Plus le faisceau présente un col étroit, plus il diverge et plus la zone cylindrique est réduite.

III. Focalisation et collimation d'un faisceau

Une lentille transforme un faisceau gaussien en un autre faisceau gaussien.

1. Focalisation

A. Principe

Focalisation : Action de faire converger un rayon lumineux près d'un point.

La lentille est placée dans la zone cylindre et on suppose $z \gg f'$. (cf. FIGURE 6)

Des rayons parallèles convergent vers le foyer.

On a en réalité la partie OSCV d'un faisceau gaussien, les rayons ne convergent pas exactement. Le nouveau col est au foyer f' .

B. Caractéristiques du faisceau émergent

$$\theta' = \tan(\theta') = \frac{w_0}{f'} = \frac{\lambda}{\pi f' \theta}$$

$$\text{donc } \theta' = \frac{\lambda}{\pi f' \theta}$$

$$w_0' = \frac{\lambda}{\pi \theta'} = \frac{\lambda f'}{\pi w_0}$$

$$\text{donc } w_0' = \frac{\lambda f'}{\pi w_0}$$

$$z_R' = \frac{\pi w_0'^2}{\lambda} = \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{\lambda f'}{\pi w_0} \right)^2 = \frac{\lambda f'^2}{\pi w_0^2} = \frac{f'^2}{z_R}$$

$$\text{donc } z_R' = \frac{f'^2}{z_R}$$

Le but est de minimiser w_0' .

On choisit une lentille de courte focale.

$$\begin{array}{l} \text{A.N. } w_0 = 1 \text{ mm} \\ \lambda = 633 \text{ nm} \\ f' = 10 \text{ cm.} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} w_0 = 1 \text{ mm} \\ \lambda = 633 \text{ nm} \\ f' = 10 \text{ cm.} \end{array}} \right\} w_0' = 10 \text{ } \mu\text{m.}$$

En pratique, on arrive à f' de l'ordre de w_0 et à w_0' de l'ordre de λ .

C. Intensité au foyer

Au foyer, l'énergie est très concentrée, on a une grande intensité.

Si la lentille est parfaite, $P_{\text{avant}} = P_{\text{après}}$.

$$\text{donc } \frac{\pi}{2} w_0^2 I_{\text{max}} = \frac{\pi}{2} w_0'^2 I_{\text{max}}'$$

$$\text{donc } I_{\text{max}}' = I_{\text{max}} \left(\frac{w_0}{w_0'} \right)^2$$

$$\text{A.N. } \frac{w_0}{w_0'} = 100$$

$$\text{donc } I_{\text{max}}' = 10^4 \times I_{\text{max}}$$

2. Collimation

A. Principe

Collimation : Action de transformer un faisceau en un faisceau de rayons parallèles.

On place le col au foyer et on suppose $f' \gg z_R$.

La lentille est dans la zone conique. (cf. FIGURE 7)

On obtient ainsi des rayons parallèles.

On a en réalité créé une zone cylindrique d'un faisceau gaussien, les rayons divergent ensuite.

3. Caractéristiques d'un faisceau émergent

$$\theta \approx \tan(\theta) = \frac{w_0}{f'}$$

$$w_0 = f' \theta = f' \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

$$\text{donc } w_0 = \frac{\lambda f'}{\pi w_0}$$

N.B.: par le principe de réciprocité (même relation que dans I.B. !
du retour inverse
et $f \circ f = \text{id}$ (involutif)). De même,

$$\theta' = \frac{\lambda}{\pi f' \theta}$$

$$z_R' = \frac{f'^2}{z_R}$$

On souhaite obtenir θ' petit.

On veut une lentille à grande focale.

$$\text{A.N. } \theta = 1'$$

$$f' = 4 \text{ mm}$$

$$\lambda = 633 \text{ nm}$$

$$\theta' = 2'$$

Échec ! $\theta' > \theta$.

Il faudrait augmenter θ .

3. Élargisseur de faisceau

A. Tracé de rayons parallèles

(cf. FIGURE 8)

C'est une lunette de Galilée inversée ! Système afocal,

$$d = f_1' \tan(\alpha) \approx f_1' \alpha$$

$$d = -f_2' \tan(\alpha') \approx -f_2' \alpha'$$

$$\text{donc } f_1' \alpha = -f_2' \alpha'$$

$$\text{donc } \alpha' = -\frac{f_1'}{f_2'} \alpha$$

B. Etude en optique gaussienne

Première lentille = 1. et seconde lentille = 2.

* Avant : θ, ω_0, z_R

* 1^{er} passage :

$$\theta' = \frac{\lambda}{\pi f_1' \omega_0} ; \quad \omega_0' = \frac{\lambda f_1'}{\pi \omega_0} ; \quad z_R' = \frac{f_1'^2}{z_R}$$

* 2^{ème} passage :

$$\theta'' = \frac{\lambda}{\pi \theta' f_2'} = \frac{f_1'}{f_2'} \theta$$

$$\omega_0'' = \frac{\lambda f_2'}{\pi \omega_0'} = \frac{f_2'}{f_1'} \omega_0$$

$$z_R'' = \frac{f_2'^2}{z_R'} = \frac{f_2'^2}{f_1'^2} z_R$$

Relations très analogues à celles de 3.A.!

Pour obtenir θ'' petit, on choisit $\frac{d_2'}{d_2} \ll 1$.

et w_0'' grand

A.N. pour la Lune

$$\theta'' = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ$$

$$w_0'' = 77 \text{ cm}$$

$$z_2'' = 3500 \text{ km}$$

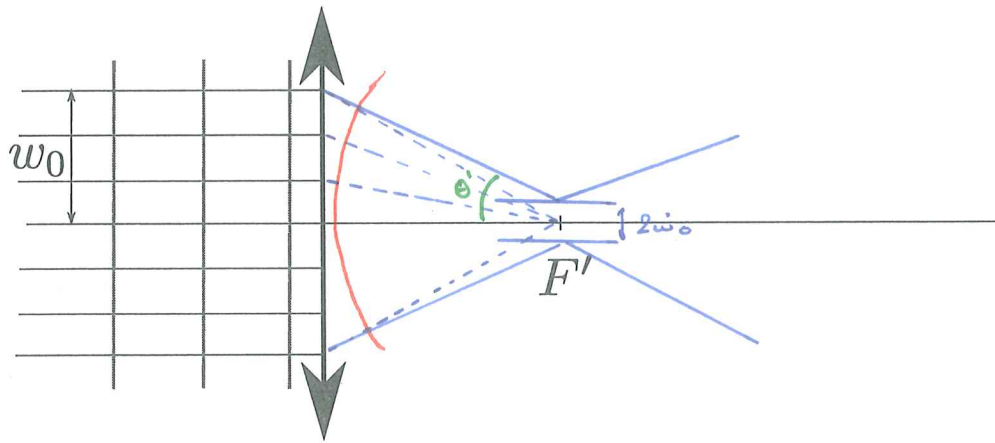


FIGURE 6 – Focalisation d'un faisceau gaussien par une lentille convergente.

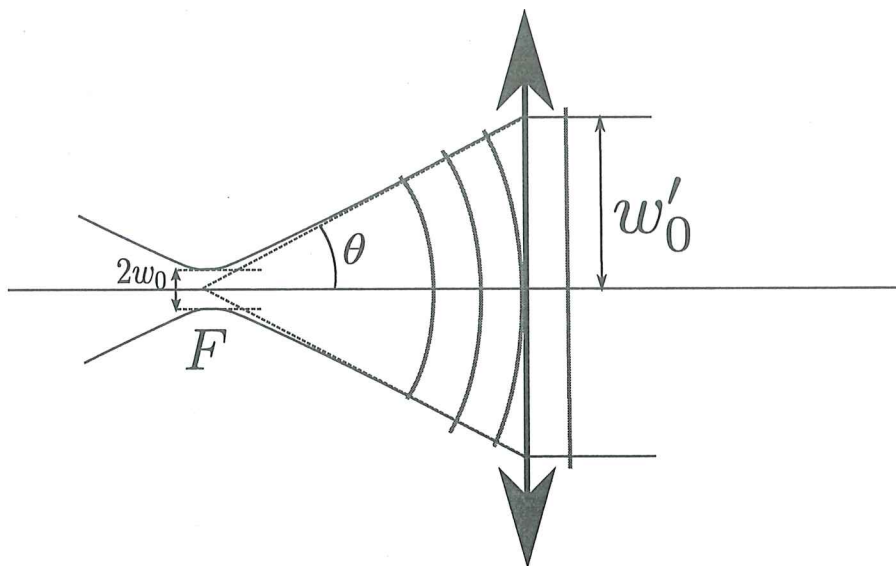


FIGURE 7 – Collimation d'un faisceau gaussien par une lentille convergente

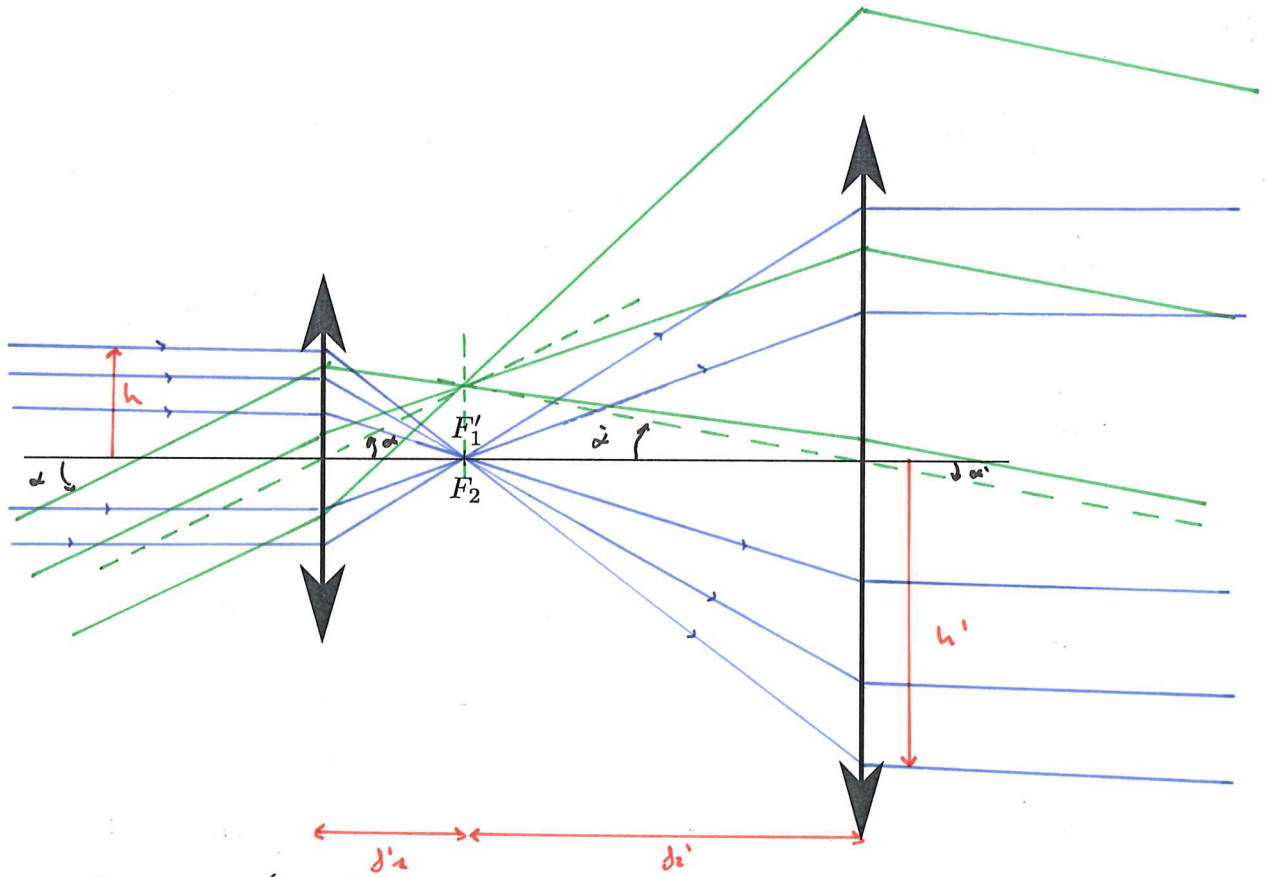


FIGURE 8 – Élargisseur de faisceau : tracé de rayons lumineux

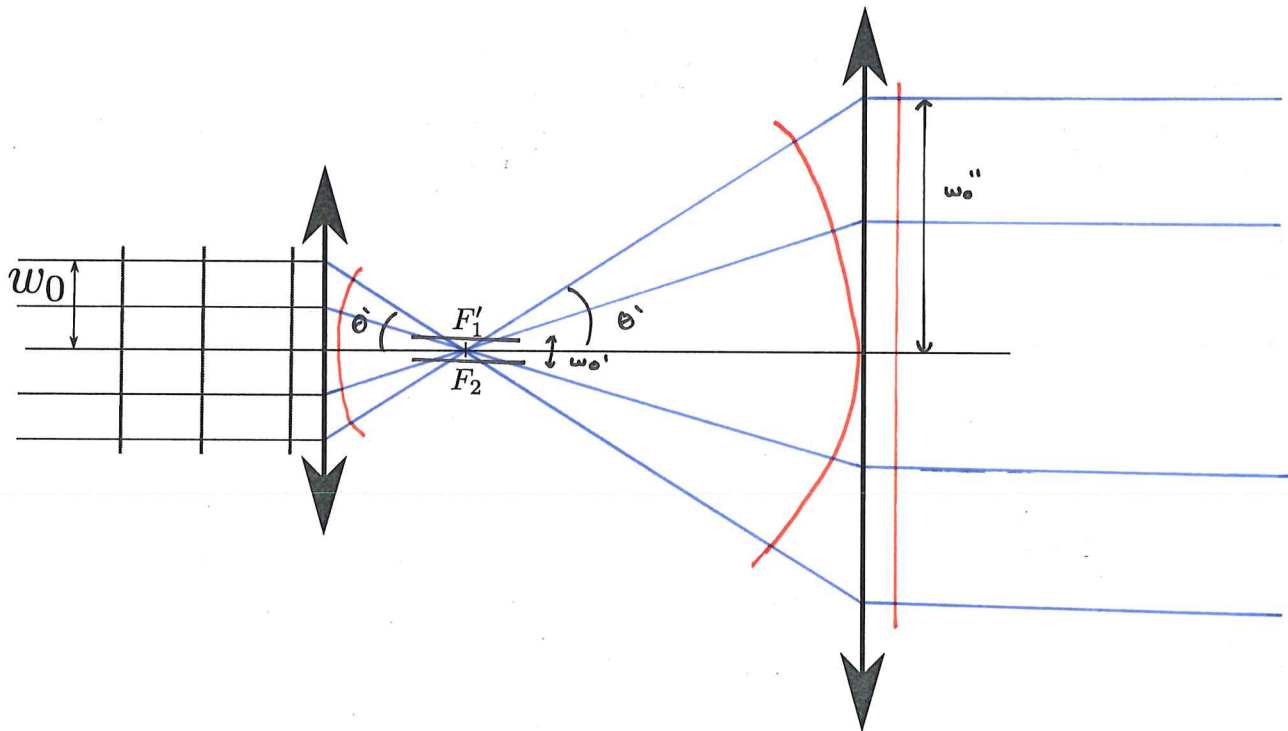


FIGURE 9 – Élargisseur de faisceau : étude en optique gaussienne