PC^* — mathématiques **jeudi 29 juin 2023**
TD introductif

Questions de cours

Question 1. Énoncer le théorème de Rolle.

Question 2. Donner la définition d'un projecteur.

Question 3. Donner la définition d'une fonction convexe.

Question 4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, donner la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}$ (avec démonstration).

Question 5. Donner la définition de la fonction arcsinus et tracer son graphe.

Question 6. On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Rappeler les hypothèses sur n et p. Décrire en formules la loi de X. Donner l'espérance et la variance de X.

Question 7. Rappeler ce que sont les séries de Riemann et préciser lesquelles sont convergentes.

Question 8. Rappeler la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme et donner sa caractérisation principale.

Calculs

Question 9. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n.$$

Trouver une expression du terme général de cette suite.

Question 10. Trouver l'ensemble des polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) = \mathrm{P}(\mathrm{X})$.

Question 11. Déterminer la primitive nulle en 0 de la fonction arctangente sur $\mathbb{R}$.

Question 12. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{1/3}$.

Question 13. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$, puis exprimer sa dérivée.

Question 14. Pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer que l'équation $x^n + \cdots + x = 1$, d'inconnue $x \in [0, 1]$, possède une unique solution.

Question 15. On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{A})$ et une base de $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$.
