Exercice 1. (*) Factoriser le polynôme $(\mathrm{X}+\mathrm{i})^n-(\mathrm{X}-\mathrm{i})^n$ puis exprimer la somme et le produit de ses racines.

Exercice 2. (*) Montrer que tout polynôme réel de degré impair possède au moins une racine réelle.

Exercice 3. (*) Soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_p)$ une liste d'éléments de $\mathbb{C}$ distincts. Soit $(m_1,\dots,m_p)\in(\mathbb{N}^*)^p$.

On pose $\mathrm{P}=\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(\mathrm{X}-\alpha_k)^{m_k}$.

Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle P'/P.

Exercice 4. (*) Soient $a_1,\dots,a_n$ des nombres complexes distincts. On pose

$$\mathrm{P}=\prod_{k=1}^{n}(\mathrm{X}-a_k).$$

Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{a_1,\dots,a_n\}$. Qu'obtient-on en réduisant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-a_k}$ au même dénominateur ?

Exercice 5. (*) On reprend le polynôme P de l'exercice précédent. Soit $r\in[\![0,n-2]\!]$.

a. Réduire en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{\mathrm{X}^{r+1}}{\mathrm{P}}$.

b. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k)^r}{\mathrm{P}'(a_k)}$.

Exercice 6. (*) Soit un nombre complexe z tel que $|z|\neq 1$. À l'aide de sommes de Riemann, calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}.$$

Exercice 7. (*) Soit un entier $n\geqslant 2$. On pose $\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/n}$.

a. Reconnaître le polynôme $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(\mathrm{X}-\omega^k)$.

b. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1-\omega^k}$.

Exercice 8. (*) On note $(\mathrm{E}_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout quadruplet (i,j,k,ℓ) d'indices de $[\![1,n]\!]$, montrer l'égalité $\mathrm{E}_{i,j}\cdot\mathrm{E}_{k,\ell}=\delta_{j,k}\,\mathrm{E}_{i,\ell}$.

Exercice 9. (*) On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}$.

a. Trouver un polynôme annulateur de A de degré aussi petit que possible.

b. En déduire une expression des puissances de A.

c. Vérifier que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 10. (**) On considère l'endomorphisme $f:\mathrm{P}\mapsto\mathrm{P}-\mathrm{P}'$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

a. Trouver un polynôme annulateur de f.

b. En déduire que f est bijectif et déterminer son inverse.

Exercice 11. (*) Résoudre l'équation différentielle $xy'(x) + y(x) = \cos(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 12. (*) Résoudre l'équation différentielle $y' - y\tan(x) = \dfrac{1}{1+\cos(x)}$ sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 13. (**) Résoudre le système différentiel suivant

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} (1+t^2)x'(t) & = & tx(t) & + & y(t) \\ (1+t^2)y'(t) & = & -x(t) & + & ty(t). \end{array}\right.$$

On utilisera pour cela la fonction $z = x + \mathrm{i}y$.

Exercice 14. (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver les solutions réelles de l'équation différentielle $y''(x) + y'(x) + y(x) = \cos(nx)$ sur $\mathbb{R}$.

Trouver une solution 2π-périodique ? Est-ce la seule ?

Exercice 15. (*) Résoudre l'équation différentielle $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = x^2\mathrm{e}^{-2x}$.

Exercice 16. (*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{I}_n = \left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$. On définit la fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$ sur la réunion des I_n.

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction tangente.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans I_n, notée x_n dans la suite.

3. Montrer que x_n est équivalent à $n\pi$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_n - n\pi$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité $y_n = \mathrm{Arctan}(x_n)$. En déduire la limite de y_n quand n tend vers $+\infty$.

5. Montrer que $\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2}\right)$ équivaut à $y_n - \frac{\pi}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

6. En déduire un développement asymptotique de la forme $y_n = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

7. Obtenir un développement asymptotique de la forme $y_n = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 17. (*) On définit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0.$$

a. Vérifier que la fonction f est continue en 0.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18. (**) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En calculant de deux façons différentes le développement limité à l'ordre m en 0 de la fonction $x \mapsto (\mathrm{e}^x - 1)^m$, montrer l'égalité

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^j = \left\{\begin{array}{lll} 0 & \text{si} & j \in [\![0, m-1]\!], \\ m! & \text{si} & j = m. \end{array}\right.$$

Exercice 19. (*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$.

Vérifier que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$. Pourquoi est-ce intéressant ?
