Exercice 1. Famille orthogonale de polynômes (*) On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par la formule

$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\ dt.$$

a. Pour tout couple (i, j) de $\mathbb{N}^2$, calculer $(X^i|X^j)$.

b. Montrer l'existence et l'unicité d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes réels telle que

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n soit unitaire (au sens des polynômes) ;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(P_0, \dots, P_n)$ soit une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

c. Déterminer les polynômes P_0, P_1, P_2.

d. En déduire le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction

$$F_2 : (a, b) \mapsto \int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2\ dt.$$

Exercice 2. (*) Justifier que la fonction

$$f : (a, b) \mapsto \int_0^1 (e^t - at - b)^2\ dt$$

possède un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et qu'il est atteint en un unique point.

Déterminer ce minimum.

Exercice 3. (*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Prouver que F est stable par A si, et seulement si, son orthogonal est stable par A^T.

Qu'obtient-on dans le cas d'une matrice symétrique ou antisymétrique ?

Exercice 4. (**) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E.

On se donne une base orthonormale $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et on note A la matrice représentative de u dans cette base.

On appelle *adjoint* de u tout endomorphisme v de E tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (u(x)|y) = (x|v(y)).$$

a. Dans cette question, on suppose que u possède un adjoint v. Déterminer la matrice représentative de v dans la base $\mathcal{E}$.

b. Montrer que u possède exactement un adjoint.

Exercice 5. (*) On note P le plan de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u = (1, 1, 1, 0)$ et $v = (1, 1, 0, 1)$. On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique.

Déterminer la matrice canoniquement associée au projecteur orthogonal sur P. Même question pour la symétrie orthogonale d'axe P.

Exercice 6. (*) Soient A et B deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E.
Prouver l'égalité $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

Exercice 7. (*) Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan P de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - y + 2z = 0$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Idem pour la symétrie orthogonale d'axe P.

Exercice 8. (*) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $(X_1, \ldots, X_p)$ une base orthonormale de F.

Démontrer que la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur F s'écrit $\sum_{k=1}^{p} X_k \cdot X_k^T$.

Exercice 9. (*) Une *réflexion* d'un espace euclidien E est une symétrie orthogonale relativement à un *hyperplan*, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de E dont la dimension vaut $\dim(E) - 1$.

a. Soit v un vecteur de E non nul. On note H_v l'hyperplan de E défini par $H_v = \mathrm{Vect}(v)^\perp$ et on note s_v la réflexion relative à H_v.
Pour tout vecteur x de E, démontrer la relation

$$s_v(x) = x - 2\frac{(v|x)}{(v|v)}v.$$

b. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^2$, on note D_θ la droite dirigée par le vecteur $u(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et on note s_θ la réflexion relative à cette droite.

Déterminer la matrice canoniquement associée à s_θ.

c. (**) On se donne deux vecteurs a et b de E distincts et non nuls tels que $||a|| = ||b||$. Montrer qu'il existe une unique réflexion de E qui envoie a sur b.

Exercice 10. (*) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

a. Prouver l'égalité $\mathrm{Ker}(M^T) = (\mathrm{Im}(M))^\perp$.

Qu'obtient-on dans le cas d'une matrice symétrique ou antisymétrique ?

b. Prouver l'égalité $\mathrm{Ker}(M^T \cdot M) = \mathrm{Ker}(M)$.

c. Prouver l'égalité $\mathrm{rg}(M^T \cdot M) = \mathrm{rg}(M)$.

d. Quelle égalité obtient-on pour $\mathrm{Im}(M^T \times M)$?

e. Dans cette question et la suivante, on ajoute la condition $2 \leqslant p < n$. On pose $B = M^T \cdot M$ et on suppose que M est de rang p.

Montrer alors que B est inversible. Montrer ensuite que la matrice $M \cdot B^{-1} \cdot M^T$ (notée P) est une matrice de projection orthogonale. Vérifier l'égalité $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Im}(M)$.

Exercice 11. (**) **Matrice de Gram** Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un espace euclidien E. On lui associe sa *matrice de Gram*, qui est la matrice

$$G(x_1, \ldots, x_p) = ((x_i|x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$$

de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

a. On note n la dimension de E. Trouver une matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $M^T \cdot M = G(x_1, \ldots, x_p)$.

b. Prouver l'égalité $\mathrm{Ker}(M^T \cdot M) = \mathrm{Ker}(M)$.

c. En déduire que la matrice $G(x_1, \ldots, x_p)$ est inversible si, et seulement si, la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

Exercice 12. (**) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 soit nulle.

a. Prouver l'égalité $\mathrm{Ker}(A + A^T) = \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(A^T)$.

b. Montrer que l'inversibilité de $A + A^T$ équivaut à l'égalité $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(A)$.

Exercice 13. (*) Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, prouver l'égalité $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
