PC* — mathématiques **jeudi 14 septembre 2023**
Devoir surveillé n° 1 **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Questions de cours

Question 1. Énoncer le théorème de Rolle.

Question 2. Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes tous distincts.

Rappeler ce qu'est la base de Lagrange de $\mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$ associée à $(a_1, \dots, a_n)$ et donner la décomposition de tout polynôme de $\mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$ dans cette base.

Question 3. Énoncer le théorème du rang.

Question 4. Donner la définition de la trace d'une matrice carrée et de la trace d'un endomorphisme.

Question 5. Donner la définition d'une fonction convexe.

Question 6. Donner la définition de la fonction arccosinus et tracer son graphe.

Question 7. Rappeler la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme et donner sa caractérisation par les dérivées successives.

Question 8. Rappeler ce qu'est une matrice de Vandermonde et donner la valeur de son déterminant (sans démonstration).

Calculs

Question 9. Décomposer la fonction rationnelle $f : z \mapsto \dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)(z-4)}$ en éléments simples.

Question 10. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n.$$

Trouver une expression du terme général de cette suite.

Question 11. Déterminer la primitive nulle en 0 de la fonction arctangente sur $\mathbb{R}$.

Question 12. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{1/3}$.

Question 13. On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Déterminer une base de Ker(A) et une base de Im(A).

Question 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver l'égalité

$$\sum_{0 \leqslant p < q \leqslant n-1} (p+q) = \frac{(n-1)^2\ n}{2}.$$

On pourra procéder par récurrence.

Problème 1

On se donne un entier $n \geqslant 2$ et on pose $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$. On introduit la matrice $\mathrm{M} = (m_{p,q})_{0\leqslant p,q\leqslant n-1}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont donnés par

$$m_{p,q} = \omega^{p\times q}.$$

On fera bien attention à la convention consistant à numéroter les lignes et les colonnes de 0 à $n-1$ et non de 1 à n. Cette convention est inspirée de la convention du langage Python et elle vise à simplifier l'écriture des calculs.

Le but de ce problème est de calculer le déterminant de M.

Question 15. Écrire la matrice M dans le cas $n = 4$ puis calculer son déterminant.

Question 16. Montrer que $\overline{\mathrm{M}} \times \mathrm{M} = n \times \mathrm{I}_n$, où $\overline{\mathrm{M}}$ est la matrice de coefficients $\overline{m_{p,q}}$.

Question 17. En déduire la valeur de $|\mathrm{dét}(\mathrm{M})|$. On pourra admettre l'égalité $\overline{\mathrm{dét}(\mathrm{M})} = \mathrm{dét}\,\overline{\mathrm{M}}$.

Question 18. Reconnaître que M est une matrice de Vandermonde puis, à l'aide de l'astuce de l'angle moitié, en déduire un argument de dét(M).

Question 19. Exprimer finalement le déterminant de M.

Problème 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

Soit f un endomorphisme de E. Soit $x \in \mathrm{E}$. On introduit la famille $\mathcal{C} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ et on suppose que $\mathcal{C}$ est une base de E. En particulier, il existe un unique $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$f^n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, f^k(x).$$

On introduit alors le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\, \mathrm{X}^k$.

Question 20. Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, vérifier l'égalité $\mathrm{P}(f)(f^j(x)) = 0_{\mathrm{E}}$.

Question 21. Montrer que P est un polynôme annulateur de f.

Question 22. On note A la matrice de f relativement à la base $\mathcal{C}$ de E. Écrire cette matrice.

Question 23. Montrer que P est un polynôme annulateur de la matrice A.

Problème 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$.

Question 24. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'égalité $\mathrm{I}_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}\mathrm{I}_n$.

Question 25. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathrm{I}_n = n((2n-1)\mathrm{J}_{n-1} - 2n\mathrm{J}_n))$.

Question 26. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathrm{I}_n > 0$.

On pose alors $\mathrm{Q}_n = \mathrm{J}_n/\mathrm{I}_n$.

Question 27. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathrm{Q}_{n-1} - \mathrm{Q}_n = 1/(2n^2)$.

Question 28. Pour tout $x \in [0, \pi/2]$, montrer que $x \leqslant \frac{\pi}{2}\sin(x)$.

Question 29. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathrm{J}_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}(\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+1})$.

Question 30. En déduire que la suite $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Question 31. Déterminer la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Problème 4

On considère un espace vectoriel complexe E non trivial de dimension finie.

Si f et g sont des endomorphismes de E, on note fg la composée $f \circ g$ pour alléger la notation. De plus, on introduit la notation

$$[f, g] = fg - gf.$$

Un endomorphisme *nilpotent* de E est un endomorphisme u pour lequel il existe un exposant p strictement positif tel que u^p soit l'endomorphisme nul de E.

Le but de cet exercice est de prouver la propriété suivante.

> Si f et g sont deux endomorphismes de E tels que f commute avec $[f, g]$, alors l'endomorphisme $[f, g]$ est nilpotent.

Question 32. Soient f_1, f_2, f_3 trois endomorphismes de E. Montrer l'identité

$$[f_1 f_2, f_3] = [f_1, f_3] f_2 + f_1 [f_2, f_3].$$

Question 33. Soit g un endomorphisme de E. Montrer que l'application

$$\mathrm{C}_g : f \mapsto [f, g]$$

est un endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

On considère maintenant deux endomorphismes f et g de E et on pose $h = [f, g]$. On fait l'hypothèse que h commute avec f, c'est-à-dire

$$fh = hf.$$

Question 34. Montrer que h commute avec toutes les puissances de f.

Question 35. Pour tout entier k strictement positif, montrer la relation

$$[f^k, g] = k f^{k-1} h.$$

Question 36. Pour tout polynôme complexe P, montrer la relation

$$[\mathrm{P}(f), g] = \mathrm{P}'(f) h.$$

Question 37. Trouver un entier p pour lequel la famille

$$(\mathrm{Id}_\mathrm{E}, f, f^2, \ldots, f^p)$$

est nécessairement liée. En déduire l'existence d'un polynôme P non nul pour lequel l'endomorphisme $\mathrm{P}(f)$ est l'endomorphisme nul de E.

Dans la suite, on se donne un tel polynôme P.

Question 38. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, prouver l'égalité

$$\mathrm{P}^{(k)}(f) h^{2^k - 1} = 0.$$

Pour cela, on procédera par récurrence et on fera intervenir le produit

$$h^{2^k - 1} [\mathrm{P}^{(k)}(f) h^{2^k - 1}, g].$$

Question 39. Conclure.
