En remplacement du problème 3

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\,dt$

et $J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t)\,dt$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'égalité

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n .$$

~~En déduire que $I_n - I_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.~~

~~En déd~~

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$I_n = n\left[(2n-1)J_{n-1} - 2n\,J_n\right].$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $I_n > 0$.

On pose alors $Q_n = J_n / I_n$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $Q_{n-1} - Q_n = \dfrac{1}{2n^2}$.

e. Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, montrer que $x \leq \frac{\pi}{2}\sin(x)$.

f. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $J_n \leq \dfrac{\pi^2}{4}\left(I_n - I_{n+1}\right)$.

g. En déduire que $Q_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

h. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.