

Exercice 1. Lemme de Riemann-Lebesgue (*)

Soient a et b dans \mathbb{R} tels que $a < b$. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[a, b]$, à valeurs complexes. Pour tout x réel, on pose

$$F(x) = \int_a^b f(t) e^{ixt} dt.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la fonction F admet une limite nulle en $+\infty$.

Question 1. À l'aide d'une intégration par parties, trouver une constante C (indépendante de x) telle que

$$\forall x > 0, \quad |F(x)| \leq \frac{C}{x}.$$

Question 2. Conclure.

Problème I ()**

Le but de ce problème est de montrer que pour tout x dans $]0, 2\pi[$, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{ikx}}{k}$ est convergente et de calculer sa somme.

Pour tout $x \in]0, 2\pi[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$E_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{e^{ikx}}{k}.$$

Question 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'expression de E'_n sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

Question 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in]0, 2\pi[$, démontrer l'égalité

$$E_n(x) = E_n(\pi) + \int_{\pi}^x \frac{ie^{it}}{1 - e^{it}} dt - i \int_{\pi}^x \frac{e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} dt.$$

Question 5. Soit $x \in]0, 2\pi[$. À l'aide de l'astuce de l'angle moitié, calculer l'intégrale $\int_{\pi}^x \frac{ie^{it}}{1 - e^{it}} dt$.

Question 6. Conclure en utilisant le lemme de Riemann-Lebesgue.

Problème II ()**

L'objectif de ce problème est de calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha}$ quand elle existe.

Première partie — calcul de la somme d'une série

Dans cette première partie, on fixe un élément a de l'intervalle $]0, 1[$.

Question 7. Pour tout x dans l'intervalle $]0, \pi[$ et tout n dans \mathbb{N}^* , on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}, \quad C_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos(kx), \quad B_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Montrer l'identité $S_n(x) = 2B_n(x)$. En déduire une relation entre $C_n(x)$ et $B_n(x)$.

Question 8. Pour tout n dans \mathbb{N}^* , montrer que l'intégrale $\int_0^{\pi} B_n(x) dx$ existe et qu'elle vaut $\pi/2$.

Question 9. On définit une fonction φ de $[0, \pi]$ dans \mathbb{R} en posant

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(x) = \frac{\cos(ax) - 1}{\sin(x/2)} \quad \text{si } x \in]0, \pi].$$

Montrer que la fonction φ est de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[0, \pi]$ et préciser la valeur de $\varphi'(0)$.

Question 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^\pi \varphi(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) dx$.

À l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue, montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Question 11. Pour tout n dans \mathbb{N}^* , on pose $u_n = \int_0^\pi \cos(ax) \cos(nx) dx$.

a. Pour tout n dans \mathbb{N}^* , montrer l'égalité $\sum_{k=1}^n u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2}I_n + \frac{\pi}{2}$.

b. Prouver la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ et préciser la valeur de sa somme.

Question 12. Prouver l'égalité suivante

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}a}{n^2 - a^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a}.$$

Deuxième partie — calcul d'une intégrale

Dans cette partie, on fixe un élément α de l'intervalle $]1, +\infty[$.

Question 13. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$.

On introduit les notations suivantes

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}, \quad G(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}, \quad H(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}.$$

Question 14. Pour tout n dans \mathbb{N} , exprimer la somme $\sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{k\alpha} dt$ de deux manières.

Question 15. Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Question 16. En déduire l'égalité suivante

$$G(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1}.$$

Question 17. À l'aide d'un changement de variable de la forme $t \mapsto t^\beta$ pour une constante β strictement négative bien choisie, montrer l'égalité

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} G\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right).$$

Question 18. Obtenir finalement l'égalité $F(\alpha) = \frac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)}$.

Exercice 2. (*) Trouver toutes les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaires supérieures telles que A et A^T commutent.
