Exercice 1. (*) Factoriser le polynôme $(\mathrm{X}+\mathrm{i})^n - (\mathrm{X}-\mathrm{i})^n$ puis exprimer la somme et le produit de ses racines.

Exercice 2. (*) Montrer que tout polynôme réel de degré impair possède au moins une racine réelle.

Exercice 3. (*) Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ une liste d'éléments de $\mathbb{C}$ distincts. Soit $(m_1, \dots, m_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$.

On pose $\mathrm{P} = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (\mathrm{X} - \alpha_k)^{m_k}$.

Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle P'/P.

Exercice 4. (*) Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes distincts. On pose

$$\mathrm{P} = \prod_{k=1}^{n} (\mathrm{X} - a_k).$$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Qu'obtient-on en réduisant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - a_k}$ au même dénominateur ?

Exercice 5. (*) On reprend le polynôme P de l'exercice précédent. Soit $r \in [\![0, n-2]\!]$.

a. Réduire en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{\mathrm{X}^{r+1}}{\mathrm{P}}$.

b. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k)^r}{\mathrm{P}'(a_k)}$.

Exercice 6. (*) Soit un nombre complexe z tel que $|z| \neq 1$. À l'aide de sommes de Riemann, calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}.$$

Exercice 7. (*) Soit un entier $n \geqslant 2$. On pose $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/n}$.

a. Reconnaître le polynôme $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} (\mathrm{X} - \omega^k)$.

b. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \omega^k}$.

Exercice 8. (*) On note $(\mathrm{E}_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout quadruplet (i, j, k, ℓ) d'indices de $[\![1, n]\!]$, montrer l'égalité $\mathrm{E}_{i,j} \cdot \mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_{j,k}\, \mathrm{E}_{i,\ell}$.

Exercice 9. (*) On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Trouver un polynôme annulateur de A de degré aussi petit que possible.

b. En déduire une expression des puissances de A.

c. Vérifier que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 10. (**) On considère l'endomorphisme $f : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P} - \mathrm{P}'$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

a. Trouver un polynôme annulateur de f.

b. En déduire que f est bijectif et déterminer son inverse.

Solution de l'exercice 10.

a. Notons D l'endomorphisme $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, de sorte que $f = \mathrm{Id} - \mathrm{D}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on remarque l'égalité $\mathrm{D}^k(\mathrm{P}) = \mathrm{P}^{(k)}$.
Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on connaît l'égalité $\mathrm{P}^{(n+1)} = 0$, si bien que D^{n+1} est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

On en déduit l'égalité $(\mathrm{Id} - f)^{n+1} = 0$, qui signifie que $(1 - \mathrm{X})^{n+1}$ est un polynôme annulateur de f.

---

b. La formule du binôme donne

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k f^k = 0 \quad \text{puis} \quad \mathrm{Id} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{k+1} f^k = f \circ \left(\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{k+1} f^{k-1} \right).$$

On en déduit que f est bijectif et que son inverse est

$$f^{-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{k+1} f^{k-1}.$$

Remarque. Cette expression n'est pas très satisfaisante, du fait que les puissances de f ont une expression compliquée. Le calcul suivant donne une meilleure compréhension de ce qu'est f^{-1}.

Soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Posons $\mathrm{P} = f^{-1}(\mathrm{Q})$. On a alors l'égalité $\mathrm{P} - \mathrm{P}' = \mathrm{Q}$ puis, par dérivations successives,

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathrm{P}^{(k)} - \mathrm{P}^{(k+1)} = \mathrm{Q}^{(k)}.$$

Un télescopage donne alors

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Q}^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{P}^{(k)} - \mathrm{P}^{(k+1)}) = \mathrm{P} - \mathrm{P}^{(n+1)} = \mathrm{P}.$$

La bijection réciproque de f est donc l'application $f^{-1} : \mathrm{Q} \mapsto \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Q}^{(k)}$.

Exercice 11. (*) Résoudre l'équation différentielle $xy'(x) + y(x) = \cos(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 12. (*) Résoudre l'équation différentielle $y' - y\tan(x) = \dfrac{1}{1 + \cos(x)}$ sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 13. (**) Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} (1+t^2)x'(t) &= & tx(t) &+ & y(t) \\ (1+t^2)y'(t) &= & -x(t) &+ & ty(t). \end{cases}$$

On utilisera pour cela la fonction $z = x + \mathrm{i}y$.

Exercice 14. (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver les solutions réelles de l'équation différentielle $y''(x) + y'(x) + y(x) = \cos(nx)$ sur $\mathbb{R}$.

Trouver une solution 2π-périodique ? Est-ce la seule ?

Exercice 15. (*) Résoudre l'équation différentielle $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = x^2 \mathrm{e}^{-2x}$.

Exercice 16. (*)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{I}_n = \left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$. On définit la fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$ sur la réunion des I_n.

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction tangente.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans I_n, notée x_n dans la suite.

3. Montrer que x_n est équivalent à $n\pi$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_n - n\pi$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité $y_n = \mathrm{Arctan}(x_n)$. En déduire la limite de y_n quand n tend vers $+\infty$.

5. Montrer que $\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2}\right)$ équivaut à $y_n - \frac{\pi}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

6. En déduire un développement asymptotique de la forme $y_n = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

7. Obtenir un développement asymptotique de la forme $y_n = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 17. (*) On définit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0.$$

a. Vérifier que la fonction f est continue en 0.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18. (**) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En calculant de deux façons différentes le développement limité à l'ordre m en 0 de la fonction $x \mapsto (\mathrm{e}^x - 1)^m$, montrer l'égalité

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in [\![0, m-1]\!], \\ m! & \text{si } j = m. \end{cases}$$

Exercice 19. (*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$.

Vérifier que $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$. Pourquoi est-ce intéressant ?
