Compte rendu du devoir en temps libre n° 1

Exercice 1.

b. Pour justifier que la fonction $\mathrm{T} : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\cos^2(x)} \mathrm{Arccos}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$, je rencontre une erreur de méthode fréquente, qui consiste à fixer x et à introduire une primitive A de $a : t \mapsto \mathrm{Arccos}(\sqrt{t})$ sur $[0, \cos^2(x)]$, afin d'écrire

$$\mathrm{T}(x) = \mathrm{A}(\cos^2(x)) - \mathrm{A}(0).$$

L'ennui de cette méthode, c'est que cette primitive A a été choisie pour un x fixé, si bien qu'elle dépend a priori du choix de x. On devrait donc plutôt la noter A_x, ce qui donne l'expression plus lourde — mais plus rigoureuse —

$$\mathrm{T}(x) = \mathrm{A}_x(\cos^2(x)) - \mathrm{A}_x(0).$$

Avec une telle expression, il est impossible de justifier que T est de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour résoudre ce problème, il suffit de choisir une primitive A de a sur l'intervalle $[0,1]$, indépendamment de x, et puis c'est tout.

Plus loin, le calcul de $\mathrm{G}'(x)$ est souvent trop rapide.

À peu près tout le monde arrive à l'expression

$$\mathrm{G}'(x) = -2\sin(x)\cos(x)\,\mathrm{Arccos}(|\cos(x)|) + 2\cos(x)\sin(x)\,\mathrm{Arcsin}(|\sin(x)|).$$

Ensuite, je lis souvent l'argument que l'appartenance de x à $[0, \pi/2]$ donne $\cos(x) \geqslant 0$ et $\sin(x) \geqslant 0$ et c'est bien.

Cependant, presque tout le monde donne $\mathrm{Arccos}(\cos(x)) = x$ et $\mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = x$ sans donner de justification alors que ces identités possèdent un domaine de validité (voir le corrigé).

---

c. Beaucoup dérivent sur $[-1,1]$ sans faire attention au fait que Arccos et Arcsin sont seulement dérivables sur l'intervalle $]-1,1[$, ce qui donne des formules avec de la division par 0.

Exercice 2.

a. Les inégalités $\mathrm{rg}(\mathrm{AB}) \leqslant \mathrm{rg}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{rg}(\mathrm{AB}) \leqslant \mathrm{rg}(\mathrm{B})$ peuvent être données directement — certes il est utile de savoir d'où elles proviennent. Pas besoin, donc, d'introduire des applications linéaires associées à A et à B.

Toutefois, si on décide d'introduire de telles applications linéaires, on le fait complètement, en précisant quels sont les espaces vectoriels de départ et d'arrivée.

---

b. Attention à la logique : on demande de trouver la valeur de x ; autrement dit, on demande ce que *doit* valoir x, pas ce que *peut* valoir x. C'est une condition *nécessaire* sur x qui est demandée, par une condition suffisante.

---

e. À l'inverse, il est demandé ici de fournir un exemple de couple (A, B) tel que le produit $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ soit la matrice de l'énoncé.

Un tel exemple ne peut pas être unique puisqu'on peut le remplacer par $(-\mathrm{A}, -\mathrm{B})$ ou par $(2\mathrm{A}, \mathrm{B}/2)$ par exemple.

On attend donc une condition suffisante sur le couple (A, B) et non pas une condition nécessaire. Toute conclusion du type « donc A = [...] et B = [...] » recèle une erreur de logique et répond à côté de la question.

Par ailleurs, beaucoup d'entre vous ne se contentent pas de vérifier la valeur du produit $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ mais vérifient les valeurs du rang de A et de B, ainsi que de diverses images et noyaux alors que ce n'est pas demandé dans l'énoncé.

Exercice 3.

a. La solution de mon corrigé utilise le théorème de la bijection, mais on peut aussi passer par le théorème des valeurs intermédiaires, à condition de ne pas l'employer de travers — ce théorème nécessite de mentionner la continuité et il n'utilise pas les variations de la fonction ; de plus, ce théorème ne parle que d'existence et non d'unicité.

Voici un exemple de résolution où chaque argument est à sa place.

La fonction f_n est continue sur l'intervalle $[0,1]$, à valeurs réelles, avec $f_n(0)=0<1$ et $f_n(1)=2>1$, donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe x dans $[0,1]$ tel que $f_n(x)=1$.

De plus, la fonction f_n est strictement croissante sur $[0,1]$ donc injective, si bien qu'un tel x est unique.

---

b. Nombre d'entre vous passent de $f_n(x_{n+1})\geqslant f_n(x_n)$ à $x_{n+1}\geqslant x_n$ en invoquant la croissance de la fonction f_n, ce qui est un argument incorrect — le bon argument est la *stricte* croissance de f_n.

Explication. La croissance d'une fonction f signifie que pour tout couple d'éléments de l'ensemble de départ, l'inégalité $a\leqslant b$ implique $f(a)\leqslant f(b)$. Par contraposition, on peut dire que l'inégalité $f(a)>f(b)$ implique $a>b$ mais on ne peut pas faire la même déduction avec des inégalités larges.

En fait, l'implication $(f(a)\geqslant f(b))\Rightarrow(a\geqslant b)$ est la contraposée de $(a<b)\Rightarrow(f(a)<f(b))$, ce qui signifie que la fonction f est strictement croissante.

Si cette vision purement logique des choses ne vous convainc pas, voici une autre explication.

Si on suppose la fonction f seulement croissante, on n'exclut pas qu'elle soit constante. Il est alors possible d'avoir l'égalité $f(a)=f(b)$ pour deux éléments a et b tels que $a<b$, ce qui donne $f(a)\geqslant f(b)$ mais $a<b$.

---

d. Beaucoup d'entre vous écrivent que la limite de $x_n^n+x_n$ quand n tend vers $+\infty$ est $\ell^n+\ell$, ce qui n'a pas de sens : la limite ne peut pas dépendre de n.

Exercice 4. L'écriture du coefficient binomial $\binom{m-1}{n}$ avec les factorielles nécessite l'hypothèse $m-1\geqslant n$, sans quoi on se retrouve à écrire des factorielles d'entiers strictement négatifs, ce qui n'existe pas.

Beaucoup trouvent une condition nécessaire sur m pour que l'inégalité de l'énoncé ait lieu mais font ensuite comme si le même raisonnement avait justifié que cette condition est suffisante.

Attention aux choix de notations. Lorsque le discriminant dépendant de n, il est judicieux de le noter Δ_n plutôt que Δ. De même, les solutions de l'équation de degré 2 devraient s'appeler a_n et b_n (par exemple) plutôt que x_1 et x_2.

Exercice 5.

Question 2. La récurrence d'ordre 2 est souvent bien rédigée mais la quantification de t n'est pas toujours nette. Ou bien on met le quantificateur sur t dans l'énoncé de récurrence, auquel cas on surveille la quantification à chaque étape de la démonstration, ou bien on fixe t dès le début et on travaille avec ce t une fois pour toute.

Pour l'unicité, beaucoup supposent l'existence d'un polynôme vérifiant l'identité, ce qui est absurde : cette existence vient d'être prouvée !

On lit parfois des tentatives d'unicité dans laquelle un polynôme vérifie l'égalité $\mathrm{P}(\cos(t))=\cos(nt)$ pour une seule valeur de t. L'unicité est alors manifestement fausse, puisque tout polynôme de la forme $\cos(nt)+(\mathrm{X}-\cos(t))\mathrm{Q}(\mathrm{X})$ convient alors. Le quantificateur sur t est essentiel pour obtenir l'unicité.

Question 3. La récurrence d'ordre 2 est plutôt bien menée mais le passage de $\deg(\mathrm{T}_{n-2})=n-2$ et $\deg(\mathrm{T}_{n-1})=n-1$ à $\deg(\mathrm{T}_n)=n$ est rarement bien justifié.

Une première erreur est d'affirmer que $\deg(\mathrm{T}_n)=\max(\deg(\mathrm{XT}_{n-1}),\deg(\mathrm{T}_{n-2}))$ sans vérifier que les deux polynômes qu'on ajoute ont des degrés distincts.

Une autre erreur est de donner pour argument l'inégalité $\deg(\mathrm{T}_{n-2})<\deg(\mathrm{T}_{n-1})$ alors que les polynômes qu'on ajoute ne sont pas T_{n-2} et T_{n-1} mais T_{n-2} et XT_{n-1}.

Question 5. Très peu de résolutions tiennent la route sur le plan logique. Les erreurs sont tellement variées que j'aurais pu écrire plusieurs pages pour les disséquer.

Je me contenterai de signaler qu'après avoir obtenu la liste des t pour lesquels on a $\mathrm{T}_n(\cos(t))=0$, on ne peut pas garantir qu'on a trouvé toutes les racines de T_n, mais seulement celles de la forme $\cos(t)$.

Pour conclure, il faut expliquer qu'on peut trouver n valeurs de t qui induisent n valeurs différentes de $\cos(t)$. C'est là que l'injectivité du cosinus sur $[0,\pi]$ entre en jeu. Ce n'est qu'après avoir exhibé n racines distinctes qu'on peut affirmer qu'on les a toutes.

Question 6. Les remarques de la question précédente sont encore valides pour celle-ci.

Une erreur de logique que je lis parfois consiste à fixer un t réel, à écrire l'égalité $\mathrm{T}_n(\cos(t)) = \cos(nt)$ et à en déduire l'égalité $-\sin(t)\mathrm{T}_n'(\cos(t)) = -n\sin(nt)$.

Savoir que deux fonctions coïncident en un point ne permet pas d'affirmer que leurs dérivées sont égales en ce point. Ça reviendrait à prétendre qu'un point d'une courbe est suffisant pour tracer la tangente à la courbe en ce point.

Question 7. Pour isoler la partie réelle, il ne suffit pas de mentionner que certains termes de la somme sont réels ou que certains termes sont imaginaires purs : il faut mentionner les deux.

Une fois qu'on a exprimé $\cos(nt)$ comme un polynôme en $\cos(t)$, pour en déduire une expression de T_n, il faut invoquer l'unicité de la question 2, sans quoi la formule sort de nulle part.

Question 8. Les erreurs classiques sont au rendez-vous, notamment pour le caractère défini positif : tentative de raisonner par équivalences ; oubli du ≪ fonction continue, positive, d'intégrale nulle ≫ ; oubli de l'étape ≪ le polynôme P possède une infinité de racines donc c'est le polynôme nul ≫ .

Question 10. Dans beaucoup de copies, on vérifie que la famille $(\mathrm{T}_0, \dots, \mathrm{T}_n)$ est orthogonale et non la famille $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Attention à répondre à la bonne question [1].

Question 11. Cette question est plus difficile que les autres. Les tentatives ont rarement abouti. J'ai trouvé beaucoup de confusions dans le vocabulaire ainsi que des erreurs de calcul.

Cette question n'est toutefois pas une question d'une difficulté extraordinaire et je vous encourage à la creuser et à cherche à bien comprendre comment ça marche.

---

1. Ou à ne pas trop se référer au corrigé d'une très ancienne version du même sujet.