PC* — mathématiques **jeudi 5 octobre 2023**
Devoir surveillé n° 2 — piste bleue **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Questions de cours

Question 1. On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et un projecteur p de E.

Démontrer l'égalité $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Question 2. Énoncer le théorème des séries alternées.

Question 3. Rappeler l'équivalent de Stirling.

Question 4. Donner la définition de la fonction arctangente et tracer son graphe.

Question 5. Rappeler la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme et donner sa caractérisation par les dérivées successives.

Calculs

Question 6. On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique et on considère le plan

$$\mathrm{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ -2x + y + 2z = 0\}.$$

Déterminer la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur F.

Question 7. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

Trouver une expression du terme général de cette suite.

Question 8. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} z^{4n-5}$ converge et calculer sa somme en cas de convergence.

Question 9. Montrer que $\binom{n^2}{n}$ est équivalent à $n^n \mathrm{e}^n / \sqrt{2\pi \mathrm{e} n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Problème 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{(n!)^{1/n}}$.

Question 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'inégalité $(n!)^{n+1} \leqslant ((n+1)!)^n$.

Question 11. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer l'inégalité $\ln(k) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \ln(t)\ \mathrm{d}t$.

Question 12. Pour tout entier $k \geqslant 2$, montrer l'inégalité $\ln(k) \geqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln(t)\ \mathrm{d}t$.

Question 13. Pour tout entier $n \geqslant 2$, en déduire l'encadrement

$$\int_1^n \ln(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \ln(n!) \leqslant \int_1^n \ln(t)\ \mathrm{d}t + \ln(n)$$

puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^n \ln(t)\ \mathrm{d}t$.

Question 14. Montrer que u_n est équivalent à $\dfrac{\mathrm{e}}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 15. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$?

Question 16. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{(n!)^{1/n}}$?

Problème 2

Pour tout $\alpha > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{R}_n(\alpha) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^\alpha}$ et $\mathrm{S}_n(\alpha) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k^\alpha}$.

En particulier, la somme partielle $\mathrm{S}_0(\alpha)$ est nulle, si bien que la relation $\mathrm{R}_n(\alpha) + \mathrm{S}_n(\alpha) = \mathrm{R}_0(\alpha)$ est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a vu en travaux dirigés que pour tout $\alpha > 0$, la série de terme général $\mathrm{R}_n(\alpha)$ est convergente. Dans la première partie de ce problème, on prouve une propriété plus générale de convergence de certaines séries de restes. Dans la deuxième partie, on calcule la somme de ladite série dans le cas où $\alpha > 1$. Dans la troisième partie, on précise le cas où $\alpha = 2$.

Partie I

On considère une fonction f définie sur $]0, +\infty[$, à valeurs réelles, décroissante et convexe, de limite nulle en $+\infty$. Le théorème des séries alternées permet alors de définir une suite réelle $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k f(k)$$

et on va prouver que la série de terme général r_n est convergente.

Question 17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver l'égalité $|r_n| = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \big(f(n+2p+1) - f(n+2p+2)\big)$.

Question 18. Pour tout $x > 0$, prouver l'inégalité

$$f(x+1) - f(x) \leqslant f(x+2) - f(x+1).$$

Question 19. En déduire que la suite de terme général $|r_n|$ est décroissante.

Question 20. Montrer que la série de terme général r_n est convergente.

Question 21. En déduire que pour tout $\alpha > 0$, la série de terme général $\mathrm{R}_n(\alpha)$ est convergente.

Partie II

Dans cette partie, on fixe $\alpha > 1$.

Question 22. Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité $\sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{R}_n(\alpha) = (\mathrm{N}+1)\mathrm{R}_\mathrm{N}(\alpha) + \mathrm{S}_\mathrm{N}(\alpha - 1)$.

Question 23. En déduire l'égalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{R}_n(\alpha) = \mathrm{R}_0(\alpha - 1)$.

Partie III

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Question 24. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, vérifier l'égalité $\mathrm{H}_{2p} + \mathrm{S}_{2p}(1) = \mathrm{H}_p$.

Question 25. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, vérifier l'égalité $\mathrm{H}_{2p} - \mathrm{H}_p = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{1 + \frac{k}{p}}$

Question 26. Obtenir finalement la valeur de $\mathrm{R}_0(1)$ puis celle de $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \right)$.

Problème 3

Soit E un espace préhilbertien réel, dont le produit scalaire est noté $(\,|\,)$.

Pour toute famille $(x_1, \ldots, x_p)$, on note $\mathrm{G}(x_1, \ldots, x_p)$ la *matrice de Gram* de cette famille, qui est la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathrm{G}(x_1, \ldots, x_p) = ((x_i|x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$$

et on note $\gamma(x_1, \ldots, x_p)$ le déterminant de cette matrice.

Partie I

Dans cette partie, on fixe une famille $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ de vecteurs de E et on note F le sous-espace vectoriel de E qu'elle engendre.

Question 27. Soit $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. On pose $u = \sum_{j=1}^{p} u_j \, x_j$.

Exprimer les coefficients du produit $\mathrm{G}(x_1, \ldots, x_p) \times \mathrm{U}$ à l'aide du vecteur u.

En déduire l'équivalence $\mathrm{U} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{G}(x_1, \ldots, x_p)) \iff u = 0_{\mathrm{E}}$.

Question 28. En déduire que la matrice $\mathrm{G}(x_1, \ldots, x_p)$ est inversible si et seulement si la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Partie II

On reprend les notations de la partie 1 et on suppose que la famille $\mathcal{F}$ est libre.

On considère un vecteur w de E. On note y son projeté orthogonal sur F et on pose $z = w - y$.

Question 29. À l'aide d'une opération sur les colonnes, justifier l'égalité

$$\gamma(x_1, \ldots, x_p, w) = ||z||^2 \times \gamma(x_1, \ldots, x_p).$$

Partie III

Dans cette partie, on prend $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$ et on choisit les vecteurs

$$x_1 = (1, 1, 0, 1), \quad x_2 = (1, 0, 1, 1), \quad w = (2, 1, -1, 0).$$

On pose $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x_1, x_2)$.

Question 30. À l'aide de la formule de la question précédente, calculer la distance du vecteur w au plan F.
