PC* — mathématiques **jeudi 5 octobre 2023**
Devoir surveillé n° 2 — piste rouge **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Questions de cours

Question 1. On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et un projecteur p de E.

Démontrer l'égalité $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$.

Question 2. Énoncer le théorème des séries alternées.

Question 3. Rappeler l'équivalent de Stirling.

Question 4. Donner la définition de la fonction arctangente et tracer son graphe.

Question 5. Rappeler la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme et donner sa caractérisation par les dérivées successives.

Calculs

Question 6. On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique et on considère le plan

$$\mathrm{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ -2x + y + 2z = 0\}.$$

Déterminer la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur F.

Question 7. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

Trouver une expression du terme général de cette suite.

Question 8. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} z^{4n-5}$ converge et calculer sa somme en cas de convergence.

Question 9. Montrer que $\binom{n^2}{n}$ est équivalent à $n^n \mathrm{e}^n/\sqrt{2\pi \mathrm{e} n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Problème 1

On note E l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles.
On considère l'endomorphisme Δ de E qui à toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E associe la suite Δu de terme général

$$(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n.$$

Dans ce problème, on vérifiera la convergence des séries rencontrées, même si l'énoncé ne le demande pas explicitement.

Une suite *complètement monotone* est un élément u de E vérifiant la propriété

$$\forall (p, n) \in \mathbb{N}^2, \quad (-1)^p (\Delta^p u)_n > 0.$$

Partie I

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles. On considère la suite u de terme général $u_n = f(n)$.

Question 10. Pour tout entier p strictement positif et tout entier n positif, montrer l'existence d'un x dans l'intervalle $]n, n+p[$ vérifiant l'égalité

$$(\Delta^p u)_n = f^{(p)}(x).$$

On pourra raisonner par récurrence en considérant la fonction $g : x \mapsto f(x+1) - f(x)$ et la suite v dont le terme général est $v_n = g(n)$.

Question 11. On considère la suite a de terme général $a_n = \dfrac{1}{n+1}$.
Montrer que cette suite est complètement monotone.

Partie II

On considère une suite u quelconque de E.

Question 12. Pour tout entier naturel p, montrer que la suite $\Delta^p u$ admet pour terme général

$$(\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}.$$

Question 13. Soit b dans $]0, 1[$. On considère la suite b de terme général $b_n = b^n$.
Exprimer $(\Delta^p b)_n$ et en déduire que la suite b est complètement monotone.

Partie III

On considère une fonction ω continue et positive sur le segment $[0, 1]$, différente de la fonction nulle.
Pour tout entier n, on pose

$$u_n = \int_0^1 t^n \omega(t)\ \mathrm{d}t.$$

Jusqu'à la fin de ce problème, la notation u_n désigne le nombre ci-dessus.

Question 14. Montrer que la série de terme général $(-1)^k u_k$ converge et que sa somme est donnée par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\ \mathrm{d}t.$$

Question 15. Montrer que la suite u est complètement monotone.

Question 16. Montrer l'égalité

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\ \mathrm{d}t.$$

Question 17. En déduire l'égalité

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0.$$

Question 18. Déduire des questions précédentes les égalités

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)2^{p+1}}.$$

Pour tout entier n, on pose

$$\mathcal{E}_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^k \omega(t)\ \mathrm{d}t.$$

Question 19. Montrer l'égalité

$$\mathcal{E}_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0.$$

Question 20. On pose

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k.$$

Montrer la majoration

$$|S - \mathcal{E}_n| \leqslant \frac{S}{2^{n+1}}.$$

Question 21. Quel est l'intérêt pratique de la manipulation présentée dans ce problème ?

Problème 2 — familles obtusangles

Soit E un espace euclidien, dont le produit scalaire est noté $(\, | \,)$.

Une famille de vecteurs *obtusangle* est une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_m)$ telle que pour tout couple $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on ait

$$(u_i | u_j) < 0.$$

Partie I

On considère une famille de vecteurs obtusangle $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ de E et on suppose qu'elle est libre.

On note $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ la famille obtenue à partir de $\mathcal{U}$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Enfin, on pose $M = M_{\mathcal{U}}(\mathcal{E})$ et on note $m_{i,j}$ ses coefficients.

Question 22. Rappeler en quoi consiste ce procédé géométriquement et donner les formules qui définissent les vecteurs de $\mathcal{E}$.

Question 23. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, montrer que le vecteur e_k est une combinaison linéaire de $(u_1, \dots, u_k)$ à coefficients positifs.

On pourra raisonner par une récurrence finie.

Question 24. Montrer que les coefficients de la matrice M sont tous positifs.

Partie II

On considère une famille de vecteurs obtusangle $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ de E et on suppose qu'elle est liée. On peut donc considérer un élément $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ non nul de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, u_k = 0_E.$$

Le but de cette partie est de montrer que les λ_k sont tous non nuls et de même signe, puis d'en déduire le rang de $\mathcal{U}$.

On pose $I = \{k \in [\![1, n]\!] \; ; \; \lambda_k > 0\}$ et $J = \{k \in [\![1, n]\!] \; ; \; \lambda_k \leqslant 0\}$ et on suppose que I et J sont tous deux non vides. On a alors

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \, u_i = - \sum_{j \in J} \lambda_j \, u_j.$$

Notons alors v le vecteur égal aux deux membres de cette égalité.

Question 25. Développer $(v|v)$ et en déduire que v est nul.

Question 26. Pour tout $j \in J$, développer $(v|u_j)$ et obtenir une absurdité.

Question 27. Conclure.

Question 28. En déduire que la famille $(u_1, \dots, u_{n-1})$ est libre. Quel est le rang de $\mathcal{U}$?

Question 29. Montrer que u_n est une combinaison linéaire de $(u_1, \dots, u_{n-1})$ à coefficients tous strictement négatifs.
