Chapitre 5 — espaces vectoriels normés

1 Normes sur un espace vectoriel réel

1.1 Norme

Définition d'une norme. Espace vectoriel normé.

Exemples fondamentaux : normes N_2, N_1 et N_∞ sur $\mathbb{R}^n$ puis sur tout espace vectoriel de dimension finie, notamment les espaces de matrices ; normes analogues sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ puis sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Inégalité $\mathrm{N}(x-y) \geqslant |\mathrm{N}(x)-\mathrm{N}(y)|$.

1.2 Boules, sphères

Définition. Dessin dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes introduites au paragraphe précédent.

1.3 Normes équivalentes

Définition. Influence sur les inclusions entre boules relatives aux différentes normes.

Interprétation : deux normes équivalentes définissent les mêmes « infiniment petits ».

Théorème admis : sur un espace vectoriel réel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

1.4 Parties convexes

Définition. Cette notion ne dépend pas de la norme.

Stabilité par intersection. Exemples : les boules, les demi-espaces, les intérieurs de polygones ou de polyèdres.

1.5 Parties bornées

Définition. Suites bornées. Fonctions bornées.

Influence du choix de la norme. Cas de la dimension finie : la bornitude d'une partie ne dépend pas du choix de la norme.

Contre-exemple en dimension infinie : la suite des fonctions $f_n : x \mapsto nx^{n-1}$ est bornée pour la norme $|| \ ||_1$ mais pas pour la norme $|| \ ||_\infty$.

2 Limites de suites

2.1 Convergence d'une suite

Définition. Unicité de la limite en cas d'existence.

Toute suite convergente est bornée.

Suites extraites.

Influence du choix de la norme sur la convergence. Cas des normes équivalentes.

2.2 Cas de la dimension finie

Le choix de la norme n'influe pas sur les propriétés de convergence ni sur la valeur de la limite.

La convergence peut s'étudier coordonnée par coordonnée.

3 Topologie

3.1 Point intérieur et parties ouvertes

Définition d'un point intérieur, d'une partie ouverte.

Exemples fondamentaux (l'espace E tout entier, l'ensemble vide, les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, les boules ouvertes, les demi-plans ouverts). Les boules fermées ne sont pas des ouverts.

Stabilité par réunion quelconque et par intersection finie. Contre-exemple d'une intersection infinie : le singleton $\{a\}$ est l'intersection des boules ouvertes $\mathrm{B}(a,1/n)$ où n décrit $\mathbb{N}^*$.

Intérieur d'une partie A de E. C'est l'ensemble des points intérieurs à A. C'est le plus grand ouvert de E contenu dans A.

3.2 Parties fermées et points adhérents

Définition d'un fermé (complémentaire d'un ouvert). Caractérisation séquentielle. Exemples fondamentaux (l'ensemble vide, l'espace E tout entier, les boules fermées, les sphères, les demi-plans fermés, les droites du plan, les parties finies de E). Les boules ouvertes ne sont pas fermées.

Stabilité par intersection quelconque et par réunion finie. Contre-exemple d'une réunion infinie : la boule ouverte $\mathrm{B}(a,1)$ est la réunion des boules fermées $\mathrm{B}_f(a,1-2^{-n})$ où n décrit $\mathbb{N}$.

Point adhérent. Exemples (points de la sphère pour une boule ouverte, limite d'une suite). Caractérisation séquentielle.

Adhérence d'une partie A. C'est l'ensemble des points adhérents à A. C'est le plus petit fermé de E qui contient A.

Partie dense. Exemples : dans $\mathbb{R}$, les parties $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses ; dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la partie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense.

Invariance par passage à une norme équivalente.

4 Limite d'une fonction, continuité

4.1 Limite d'une fonction en un point adhérent

Définition. Exemples. Continuité et prolongement par continuité. Caractérisation séquentielle.

4.2 Propriétés topologiques

Image réciproque d'un fermé ou d'un ouvert par une application continue.

Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Soit f une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$.

Pour tout α réel, l'ensemble $\{x\in\mathrm{E}\ ;\ f(x)<\alpha\}$ est ouvert ; les ensembles $\{x\in\mathrm{E}\ ;\ f(x)\leqslant\alpha\}$ et $\{x\in\mathrm{E}\ ;\ f(x)=\alpha\}$ sont fermés. Exemple : l'ensemble $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Dans un espace préhilbertien, l'orthogonal de toute partie est un fermé.

4.3 Stabilité algébrique

Stabilité par combinaison linéaire, par produit, par composition.

4.4 Fonctions lipschitziennes

Définition. L'ensemble des fonctions lipschitziennes de E vers F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Si (E,N) est un espace vectoriel normé, alors la fonction N est 1-lipschitzienne.

4.5 Cas de la dimension finie

Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit A une partie de E_1. Soit f une fonction de A dans E_2. On considère une base $(d_1,\ldots,d_n)$ de E_2. Pour tout x de A, on considère la décomposition du vecteur $f(x)$ dans cette base

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)d_k,$$

ce qui définit des fonctions $f_1,\ldots,f_n$ de A dans $\mathbb{R}$.

Alors la continuité de f équivaut à celle des fonctions $f_1,\ldots,f_n$.

Continuité des applications linéaires (elles sont lipschitziennes) et des applications multilinéaires (elles sont polynomiales).

Les sous-espaces vectoriels d'un evn de dimension finie sont fermés.

Le déterminant est une fonction continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Conséquence : l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le produit matriciel est continu.

4.6 Existence d'extremums

Existence d'un extremum pour une fonction continue sur un fermé borné.

Application : norme d'opérateur pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Norme triple d'une matrice.