## Problème 1 — Inégalités de Hölder et de Minkowski

On fixe $p$ dans $]1,+\infty[$ et on pose $q = \frac{p}{p-1}$. Par commodité, on estime que le nombre $0^p$ est bien défini et qu'il vaut 0.

Provisoirement, on fixe un entier $n \geqslant 2$. Pour tout élément $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$||x||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

et on définit $||x||_q$ de manière analogue.

**Question 1.** Montrer que la fonction $||\ ||_p$ est positivement homogène et qu'elle vérifie la propriété de séparation.

**Question 2.** Vérifier que $q$ est dans $]1,+\infty[$ et qu'il vérifie l'égalité $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

**Question 3.** Pour tout couple $(\alpha, \beta)$ de $\mathbb{R}^2$, prouver l'inégalité $|\alpha\beta| \leqslant \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^q}{q}$.

**Question 4.** Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer *l'inégalité de Hölder*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant ||x||_p ||y||_q.$$

Pour cela, on appliquera la formule de la question précédente aux nombres $x_k/\mathrm{X}$ et $y_k/\mathrm{Y}$ pour des choix habiles de X et Y.

**Question 5.** Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.

**a.** Montrer la majoration

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| \times |x_k + y_k|^{p-1} \leqslant ||x||_p \times \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/q}.$$

**b.** Majorer de même la somme $\sum_{k=1}^{n} |y_k| \times |x_k + y_k|^{p-1}$.

**c.** En déduire *l'inégalité de Minkowski* $||x + y||_p \leqslant ||x||_p + ||y||_p$.

**d.** Qu'a-t-on démontré ?

**Question 6.** Soit $x$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $||x||_p$ tend vers $||x||_\infty$ quand $p$ tend vers $+\infty$.

Maintenant, on note $\ell^p$ l'ensemble des suites réelles $u = (u_k)_{k \geqslant 0}$ telles que la série $\sum |u_k|^p$ soit absolument convergente. Pour toute suite $u$ de $\ell^p$, on pose

$$\mathrm{N}_p(u) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^p\right)^{1/p}.$$

**Question 7.** Montrer que $\ell^p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

**Question 8.** Montrer que $\mathrm{N}_p$ est une norme sur $\ell^p$.

**Question 9.** Soient $u \in \ell^p$ et $v \in \ell^q$. Montrer que la série $\sum |u_k v_k|$ est convergente et prouver la majoration

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k v_k| \leqslant \mathrm{N}_p(u)\mathrm{N}_q(v).$$

## Problème 2

Dans ce problème, on fixe un entier $n$ supérieur ou égal à 2. On note $\mathrm{U}_n$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Étant donné une matrice ligne L de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, dire que cette matrice est *stochastique* signifie que ses coefficients sont tous positifs et que leur somme vaut 1.

Étant donné une matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dire que cette matrice est *stochastique* signifie qu'elle vérifie les deux conditions ci-dessous

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0 \tag{1}$$

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1, \tag{2}$$

ce qui revient à dire que toutes ses lignes sont stochastiques.

On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout vecteur colonne $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $||\mathrm{X}||_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$.

On rappelle que $||\ ||_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

### Partie I — généralités sur les matrices stochastiques

**Question 10.** Vérifier que la condition (2) équivaut à l'égalité $\mathrm{AU}_n = \mathrm{U}_n$.

**Question 11.** Montrer que $\mathcal{E}_n$ est stable par le produit matriciel.

**Question 12.** Montrer que $\mathcal{E}_n$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Question 13.** Soit $(\mathrm{A}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{E}_n$. On suppose que cette suite converge vers une certaine matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice B est un élément de $\mathcal{E}_n$.

**Question 14.** Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{E}_n$. Soit $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Prouver l'inégalité $||\mathrm{AX}||_\infty \leqslant ||\mathrm{X}||_\infty$.

### Partie II — une propriété de convergence

On fixe une matrice A de $\mathcal{E}_n$. Pour tout entier $k$ strictement positif, on pose

$$\mathrm{R}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{A}^i, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{R}_k = \frac{1}{k}\left(\mathrm{I}_n + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2 + \cdots + \mathrm{A}^{k-1}\right).$$

**Question 15.** Soit $\mathrm{W} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)$. Vérifier que la suite $(\mathrm{R}_k\mathrm{W})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

**Question 16.** Soit $\mathrm{W} \in \mathrm{Im}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)$. Montrer que la suite $(\mathrm{R}_k\mathrm{W})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

**Question 17.** À l'aide de ces deux résultats, montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

**Notation.** On note $p_\mathrm{A}$ la projection sur $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n)$. On note $\mathrm{P}_\mathrm{A}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui représente $p_\mathrm{A}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

**Question 18.** Pour tout vecteur W de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, montrer que la suite $(\mathrm{R}_k\mathrm{W})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $p_\mathrm{A}(\mathrm{W})$.

**Question 19.** Montrer que la suite de matrices $(\mathrm{R}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $\mathrm{P}_\mathrm{A}$.

**Partie III — matrice stochastique régulière**

Dans cette partie, on considère une matrice A de $\mathcal{E}_n$ et on suppose qu'elle est *régulière*, ce qui signifie qu'il existe un entier $p$ pour lequel les coefficients de $\mathrm{A}^p$ sont tous strictement positifs. On fixe un tel entier $p$.

**Question 20.** Soit $\mathrm{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}^p - \mathrm{I}_n)$.

On considère un indice $s$ tel que $w_s = \max(w_1, \ldots, w_n)$. Montrer que $\mathrm{W} = w_s \mathrm{U}_n$.

**Question 21.** En déduire l'égalité $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}^p - \mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}(\mathrm{U}_n)$.

**Question 22.** En déduire l'égalité $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}(\mathrm{U}_n)$.

**Question 23.** Montrer que la matrice $\mathrm{P_A}$ (introduite dans la deuxième partie) est de rang 1.

**Question 24.** Montrer l'existence d'une matrice ligne stochastique L de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P} = \mathrm{U} \times \mathrm{L}$.

**Question 25.** Prouver l'égalité $\mathrm{PA} = \mathrm{P}$.

**Question 26.** En déduire l'égalité $\mathrm{LA} = \mathrm{L}$.

**Question 27.** Montrer que les coefficients de L sont tous strictement positifs.

---

## Problème 3

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[0,1]$, à valeurs réelles. On suppose que cette suite de fonctions converge simplement sur $[0,1]$ vers une certaine fonction $f$ et on suppose que $f$ est continue sur $[0,1]$. On suppose également que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n$ est croissante sur $[0,1]$.

Le but de ce problème est de prouver que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.

**Question 28.** Montrer que la fonction $f$ est croissante.

Pour les questions suivantes, on fixe $\varepsilon > 0$ et on prend un entier $m \geqslant 1$ tel que $\frac{f(1)-f(0)}{m} \leqslant \varepsilon$.

Pour tout $k \in [\![0, m]\!]$, on pose $y_k = f(0) + k \times \frac{f(1)-f(0)}{m}$.

**Question 29.** Montrer l'existence de $(x_0, \ldots, x_m) \in [0,1]^{m+1}$ tel que $0 = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_m = 1$ et

$$\forall k \in [\![0, m]\!], \quad f(x_k) = y_k.$$

**Question 30.** Montrer l'existence d'un entier $r$ tel que

$$\forall n \geqslant r, \quad \forall k \in [\![0, m]\!], \quad |f_n(x_k) - f(x_k)| \leqslant \varepsilon.$$

**Question 31.** Pour tout entier $n \geqslant r$ et tout $k$ dans $[\![0, m-1]\!]$, montrer la majoration $f_n(x_{k+1}) - f_n(x_k) \leqslant 3\varepsilon$.

**Question 32.** Pour tout entier $n \geqslant r$, en déduire la majoration $||f_n - f||_{\infty,[0,1]} \leqslant 5\varepsilon$. Conclure.

---

## Problème 4

Pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\mathcal{E}(\mathrm{M}) = \left\{\mathrm{PMP}^{-1} \,;\, \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\right\}.$$

Montrer que $\mathcal{E}(\mathrm{M})$ est borné si, et seulement si, la matrice M est un multiple de $\mathrm{I}_n$.

---