Chapitre 6 — suites de fonctions

Les espaces de fonctions ne sont pas de dimension finie. Il n'y a donc pas de manière canonique de définir la convergence d'une suite de fonctions. Ce chapitre présente deux modes de convergence.

1 Convergence simple

Suites de fonctions. Convergence simple. Exemples de comportements non satisfaisants.

2 Convergence uniforme

2.1 Définition

Définition. Exemples et contre-exemples.
Remarque : la convergence uniforme implique la convergence simple.

2.2 Théorème de continuité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit f une fonction définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Hypothèses :
- pour tout n dans $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I ;
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur I.

Conclusion : la fonction f est continue sur I.

Cas où la convergence uniforme n'a lieu que sur les segments.

2.3 Passage à la limite sous l'intégrale

Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur le segment $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit f une fonction définie sur le segment $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Hypothèses :
- pour tout n dans $\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur le segment $[a, b]$;
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur le segment $[a, b]$.

Conclusion : la suite de terme général $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t$ converge vers le nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

2.4 Théorème de dérivation

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soient g et h deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Hypothèses :
- Pour tout n dans $\mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
- La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction g sur I.
- Pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, la suite de fonctions $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction h sur $[a, b]$.

Conclusions : la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est la fonction h.

Variante pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: l'hypothèse de convergence uniforme porte uniquement sur l'ordre de dérivation le plus élevé.