Chapitre 7 — convergence dominée

Théorème de convergence dominée

Soit $(f_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle. On fait les hypothèses suivantes.

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant n_0}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux.
2. Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I (et indépendante du paramètre n) vérifiant la domination
$$\forall n \geqslant n_0, \quad \forall t \in \mathrm{I}, \qquad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t).$$

On peut alors affirmer que les fonctions f_n et la fonction f sont intégrables sur I et que la suite de terme général $\int_{\mathrm{I}} f_n$ converge vers $\int_{\mathrm{I}} f$ (on peut passer à la limite sous l'intégrale).

Exemples : la suite des intégrales de Wallis converge vers 0 ; pour tout $x > 0$, la suite de terme général $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge vers $\Gamma(x)$.

Exercice 1. (*) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

a. À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ (cette intégrale est notée I dans la suite).

b. À l'aide d'un changement de variable bien choisi, trouver une relation entre I_n et l'intégrale de Wallis W_{2n+1}.

c. On donne l'équivalent $\mathrm{W}_p \sim \sqrt{\pi/(2p)}$. En déduire la valeur de I.

d. Prouver l'égalité $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, admise dans un exercice du chapitre 4.

Exercice 2. (**) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{W}_n$.

Exercice 3. (**) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Montrer l'égalité $u_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{\lfloor x \rfloor}{n}\right)^n \mathrm{d}x$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$.

Exercice 4. (***) Pour tout x réel, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t$.

Pour cela, on calculera $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2} \left(\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-\mathrm{i}tx)^k}{k!}\right) \mathrm{d}t$ et on appliquera le théorème de convergence dominée.

Programme de colles n° 5 (du lundi 13 au vendredi 24 novembre 2023)

Chapitres 6 et 7.

Dans le chapitre 5, seuls les deux premiers paragraphes ont été traités. Les notions d'espace vectoriel normé et de convergence de suites de vecteurs sont connues et elles peuvent dorénavant être utilisées dans des exercices même si je n'ai pas prévu qu'un programme de colle soit spécifiquement dédié à ce thème.
