PC* — mathématiques **jeudi 16 novembre 2023**
Devoir surveillé n° 3 — piste bleue **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Questions de cours

Question 1. Énoncer le théorème de convergence dominée.

Question 2. Rappeler la définition d'une norme.

Question 3. Rappeler la définition d'une partie convexe d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Question 4. Rappeler la définition de la convergence uniforme.

Problème 1

On définit une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,1]$ en prenant $u_0 : x \mapsto 1$ et en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,1], \quad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2)\ \mathrm{d}t.$$

Question 5. Montrer qu'on définit bien ainsi une suite de fonctions continues sur $[0,1]$.

Question 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, prouver l'encadrement $0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Question 7. En déduire que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$.

La limite simple de cette suite de fonctions est notée u.

Question 8. Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer l'égalité

$$u(x) - u_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(u_{k+1}(x) - u_k(x)\right).$$

Question 9. En déduire que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction u sur $[0,1]$.

Question 10. Montrer que la fonction u est continue sur $[0,1]$.

Problème 2

Pour toute fonction g continue sur le segment $[0,1]$, on pose $||g||_\infty = \sup\{|g(t)|\ ;\ t \in [0,1]\}$.

On rappelle que la fonction $||\ ||_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

On note E l'espace vectoriel $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour toute fonction f de E, on pose

$$\mathrm{N}(f) = |f(0)| + ||f'||_\infty.$$

Question 11. Montrer que N est une norme sur E.

Question 12. Pour tout élément f de E, démontrer la majoration $||f||_\infty \leqslant \mathrm{N}(f)$.

Question 13. Rappeler ce qu'on peut en déduire en termes de convergence de suites d'éléments de E.

Question 14. Montrer que les normes N et $||\ ||_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Problème 3

Le but de ce problème est de calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \ln(t)\ \mathrm{d}t$.

Partie I — constante d'Euler

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n)$.

Question 15. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} (u_n - u_{n-1})$ converge absolument.

Question 16. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Sa limite est notée γ. On l'appelle *constante d'Euler*.

Partie II — calcul intégral et constante d'Euler

On définit la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ \ln(t)$ de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \ln(t) & \text{si} \quad t < n \\ 0 & \text{si} \quad t \geqslant n. \end{cases}$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : u \mapsto u^n \ln(1-u)$ de $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$.

Question 17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier que la fonction g_n est intégrable sur $[0, 1[$.

On pose alors $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^1 u^n\ \ln(1-u)\ \mathrm{d}u$.

Question 18. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\ \mathrm{d}u$ et trouver sa valeur en fonction de J_n.

Question 19. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer l'égalité $\mathrm{J}_n = -\dfrac{1}{n+1}\mathrm{H}_{n+1}$.

Question 20. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Question 21. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction f.

Question 22. Pour tout $t \in]0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la majoration $|f_n(t)| \leqslant |f(t)|$.

Question 23. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\ \mathrm{d}t$.

Sa valeur est notée I_n.

Question 24. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité $\mathrm{I}_n = \dfrac{n}{n+1}\ln(n) + n\mathrm{J}_n$.

Question 25. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \ln(t)\ \mathrm{d}t$ en fonction de γ.

Problème 4 — puissances d'une matrice stochastique

On fixe un entier $n \geqslant 2$.

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est *strictement stochastique*, ce qui signifie que

- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} > 0\,;$
- $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$

En particulier, les coefficients d'une telle matrice appartiennent tous à $]0,1[$. On pose

$$m = \min \left\{ a_{i,j}\ ;\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \right\},$$

ce qui définit un élément m de $]0,1[$.

Le but de ce problème est de justifier que la suite de matrices $(\mathrm{A}^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice strictement stochastique dont toutes les lignes sont identiques.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, les coefficients de la matrice A^p sont notés $a_{i,j}^{(p)}$, de sorte que

$$\mathrm{A}^p = \left(a_{i,j}^{(p)} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Enfin, pour tout indice de colonne $j \in [\![1,n]\!]$, on pose

$$m_j^{(p)} = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} a_{k,j}^{(p)} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_j^{(p)} = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} a_{k,j}^{(p)}.$$

Question 26. Montrer que le produit de deux matrices strictement stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice strictement stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 27. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^p est strictement stochastique.

Question 28. Montrer que m appartient à $]0, 1/2]$.

Question 29. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $j \in [\![1,n]\!]$, justifier les inégalités

$$0 < m_j^{(p)} \leqslant m_j^{(p+1)} \leqslant \mathrm{M}_j^{(p+1)} \leqslant \mathrm{M}_j^{(p)}.$$

Question 30. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $j \in [\![1,n]\!]$, justifier les inégalités

$$m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geqslant m \left(\mathrm{M}_j^{(p)} - m_j^{(p)} \right) \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_j^{(p)} - \mathrm{M}_j^{(p+1)} \geqslant m \left(\mathrm{M}_j^{(p)} - m_j^{(p)} \right).$$

Question 31. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $j \in [\![1,n]\!]$, justifier l'inégalité

$$\mathrm{M}_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leqslant (1-2m) \left(\mathrm{M}_j^{(p)} - m_j^{(p)} \right).$$

Question 32. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, montrer que les suites $(m_j^{(p)})_{p \in \mathbb{N}^*}$ et $(\mathrm{M}_j^{(p)})_{p \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Question 33. Conclure.