PC* — mathématiques **jeudi 16 novembre 2023**
Devoir surveillé n° 3 — piste rouge **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Questions de cours

Question 30. Énoncer le théorème de convergence dominée.

Question 31. Rappeler la définition d'une norme.

Question 32. Rappeler la définition d'une partie convexe d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Question 33. Rappeler la définition de la convergence uniforme.

Problème 2

Soient deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $u_n : x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$.

On suppose que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Le but de cet exercice est de prouver que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Question 34. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Question 35. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} (b_n \sin(nx))^2 \,\mathrm{d}x$.

Question 36. On suppose que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Au moyen du théorème de convergence dominée, montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Question 37. On revient au cas général. En exploitant la suite de terme général $c_n = \min(1, |b_n|)$, montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
