PC^* — mathématiques **jeudi 16 novembre 2023**
Devoir surveillé n° 3 — piste noire **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Questions de cours

Question 1. Énoncer le théorème de convergence dominée.

Question 2. Rappeler la définition d'une norme.

Question 3. Rappeler la définition d'une partie convexe d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Question 4. Rappeler la définition de la convergence uniforme.

Exercice préparatoire

Question 5. Soit $\lambda \in]0,1[$. Soient a et b deux nombres réels positifs. Montrer l'inégalité

$$\lambda a + (1-\lambda)b \geqslant a^\lambda b^{1-\lambda}.$$

Question 6. Soit $\lambda \in]0,1[$. Soient a et b deux nombres réels positifs. Soit $u \in]1,+\infty[$. Montrer l'inégalité

$$(\lambda a + (1-\lambda)b)^u \leqslant \lambda a^u + (1-\lambda)b^u.$$

Question 7. Soit $\lambda \in]0,1[$. Soient a et b deux nombres réels positifs. Montrer l'inégalité

$$(a+b)^\lambda \leqslant a^\lambda + b^\lambda.$$

Problème I — inégalité de Prékopa et Leindler

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée, on pose $||f||_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.

On définit de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ la fonction $\Psi : u \mapsto \mathrm{e}^{-u^2}$.

On fixe un élément λ de $]0,1[$ ainsi que trois fonctions f, g, h éléments de $\mathcal{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$. On suppose que les fonctions f, g, h sont intégrables sur $[0,+\infty[$ et qu'elles satisfont la relation suivante

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}.$$

Le but de cette partie est de démontrer *l'inégalité de Prékopa et Leindler*, qui s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1-\lambda},$$

et que l'on abrège en (PL).

Partie I

Dans cette partie, on suppose que f et g sont à valeurs strictement positives. On pose

$$\mathrm{F} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \textbf{et} \quad \mathrm{G} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Question 8. Montrer que pour tout $t \in]0,1[$, il existe un unique $s \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{1}{\mathrm{F}} \displaystyle\int_{-\infty}^{s} f(x)\ \mathrm{d}x = t$. On le note $u(t)$.

De la même manière, pour tout $t \in]0,1[$, il existe un unique $s \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{1}{\mathrm{G}} \displaystyle\int_{-\infty}^{s} g(x)\ \mathrm{d}x = t$. On le note $v(t)$. On ne demande pas de justifier ce deuxième point.

Question 9. Montrer que les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis exprimer les fonctions u' et v'.

Question 10. On définit la fonction $w : t \mapsto \lambda u(t) + (1-\lambda)v(t)$. Justifier que w réalise une bijection de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$.

Question 11. À l'aide du changement de variable $s = w(t)$, démontrer l'inégalité (PL).

Partie II

Dans cette partie, on suppose que f, g, h sont à valeurs positives (au sens large). De plus, on fixe $\mathrm{M} > 0$ et on suppose que f et g sont identiquement nulles en dehors du segment $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$.

On définit les constantes

$$\Lambda = \min(\lambda, 1-\lambda), \quad \Theta = \max(\lambda, 1-\lambda), \quad \hat{\mathrm{M}} = \mathrm{M} \times \Theta.$$

Enfin, on définit une fonction Ψ_{M} de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\Psi_{\mathrm{M}}(u) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{\Theta^2}(|u| - \hat{\mathrm{M}})^2) & \text{si} \quad |u| > \hat{\mathrm{M}} \\ 1 & \text{si} \quad |u| \leqslant \hat{\mathrm{M}}. \end{cases}$$

Question 12. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, justifier l'inégalité $\Psi(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \Psi(x)^{\lambda}\Psi(y)^{1-\lambda}$.

Question 13. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On pose $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.

Montrer que si $|y| \leqslant \mathrm{M}$, alors $\Psi(x) \leqslant \Psi_{\mathrm{M}}(z)$.

On montrerait de même que si $|x| \leqslant \mathrm{M}$, alors $\Psi(y) \leqslant \Psi_{\mathrm{M}}(z)$.

Question 14. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On définit les fonctions $f_\varepsilon = f + \varepsilon\Psi$ et $g_\varepsilon = g + \varepsilon\Psi$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On pose $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.

Prouver la majoration $f_\varepsilon(x)^\lambda g_\varepsilon(y)^{1-\lambda} \leqslant h(z) + \varepsilon^\Lambda(||f||_\infty^\lambda + ||g||_\infty^\lambda)(\Psi_{\mathrm{M}}(z))^\Lambda + \varepsilon\Psi(z)$.

Question 15. En déduire l'inégalité (PL).

Partie III

Dans cette partie, on ne fait plus d'hypothèse supplémentaire sur les fonctions f, g, h.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note χ_n la fonction de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ qui vaut 1 sur $[-n, n]$, qui vaut 0 sur les intervalles $]-\infty, -n-1]$ et $[n+1, +\infty[$, et qui est affine sur chacun des deux intervalles $[-n-1, -n]$ et $[n, n+1]$.

Question 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, justifier l'inégalité

$$\chi_n(x)^\lambda \chi_n(y)^{1-\lambda} \leqslant \chi_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

Question 17. Montrer que l'inégalité (PL) est satisfaite (si on choisit d'utiliser le théorème de convergence dominée, on vérifiera soigneusement que ses conditions de validité sont remplies).

Problème II — théorème de densité de Weierstraß

Le but de ce problème est de démontrer le théorème suivant [1] et d'en étudier deux applications.

Théorème. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, il existe une suite de fonctions polynomiales $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

Dans tout ce problème, on utilise la notation

$$||f||_\infty = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|\,.$$

Partie 1 — démonstration du théorème de Weierstraß

Question 18. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout x dans $[0,1]$, justifier l'égalité $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = 1$.

Question 19. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout x dans $[0,1]$, justifier l'égalité $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = nx$.

Question 20. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout x dans $[0,1]$, justifier l'égalité $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2$.

Question 21. Trouver une constante $\mathrm{C} > 0$ (indépendante de x et de n) vérifiant la majoration

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall x\in[0,1],\quad \sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \mathrm{C}\,n.$$

Question 22. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en déduire la majoration

$$\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \sqrt{\frac{\mathrm{C}}{n}}.$$

On considère maintenant une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On fixe $\varepsilon > 0$. On admet [2] qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout couple (x, y) d'éléments de $[0,1]$, on ait l'implication

$$|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

et on fixe un tel α pour la suite du problème.

Pour tout élément x de $[0,1]$ et tout n de $\mathbb{N}^*$, on partitionne l'ensemble $[\![0,n]\!]$ en

$$\mathrm{X}_n(x) = \left\{k\in[\![0,n]\!]\ ;\ \left|x-\frac{k}{n}\right| < \alpha\right\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Y}_n(x) = \left\{k\in[\![0,n]\!]\ ;\ \left|x-\frac{k}{n}\right| \geqslant \alpha\right\}.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ la fonction polynomiale [3] B_n suivante

$$\mathrm{B}_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Question 23. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0,1]$, prouver la majoration

$$|\mathrm{B}_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\,||f||_\infty \sum_{k\in\mathrm{Y}_n(x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

puis

$$|\mathrm{B}_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\frac{||f||_\infty}{\alpha}\sqrt{\frac{\mathrm{C}}{n}}.$$

Question 24. En déduire que la suite de fonctions polynomiales $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

1. Démontré par Karl Weierstrass en 1885 puis généralisé par Marshall H. Stone en 1937.
2. Ce fait s'appelle la *continuité uniforme*. Il découle du *théorème de Heine*, qui affirme que toute fonction continue sur un segment est *uniformément continue*. Ce théorème n'est pas à notre programme, ni même cette notion.
3. Les fonctions B_n sont les *polynômes de Bernstein* associés à la fonction f. Ces polynômes sont notamment utilisés dans la définition des *courbes de Bézier*, utilisées dans tous les logiciels de graphisme.

Partie 2 — lemme de Riemann-Lebesgue

Dans cette partie, on démontre un cas particulier du *lemme de Riemann-Lebesgue*, dont voici l'énoncé.

Lemme. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\ \mathrm{d}t = 0.$$

Question 25. Au moyen d'une intégration par parties, démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Prenons maintenant une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et associons-lui la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant 1}$ de la première partie.

Question 26. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, démontrer la majoration

$$\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^1 \mathrm{B}_n(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\ \mathrm{d}t\right| + ||f - \mathrm{B}_n||_\infty.$$

Question 27. Conclure (on utilisera un ε).

Partie 3 — détermination d'un orthogonal

Dans cette partie, on considère l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, que l'on munit du produit scalaire $(\ |\ )$ défini par

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

La norme euclidienne associée ce produit scalaire est notée $||\ ||_2$. On note F le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions polynomiales.

Question 28. Soit $f \in \mathrm{E}$. On lui associe la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant 1}$ de la première partie.

Montrer que la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers f pour la norme $||\ ||_2$.

Question 29. On reprend les notations de la question précédente et on définit sur E la forme linéaire

$$\varphi_f : g \mapsto (f|g).$$

Montrer que la suite $(\varphi_f(\mathrm{B}_n))_{n\geqslant 1}$ converge vers $||f||_2^2$.

Question 30. Montrer que $\mathrm{F}^\perp$ est réduit au vecteur nul.