

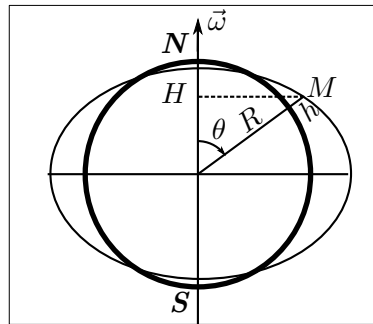
Référentiel terrestre

Complément : modélisation cohérente du champ de pesanteur terrestre

La rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique est associée à l'existence de forces d'inertie d'entraînement qui ont plusieurs conséquences.

- i) Le champ de pesanteur comprend, en plus du champ gravitationnel \vec{g}_{grav} , un terme centrifuge \vec{g}_{ie} .
- ii) La Terre n'est pas sphérique mais aplatie aux pôles et bourrelée à l'équateur. Le champ gravitationnel \vec{g}_{grav} s'écarte donc de celui que créerait une planète à symétrie sphérique.
- iii) Puisque la Terre est aplatie, la mesure de \vec{g} à sa surface se fait en des points dont la distance au centre de la Terre n'est pas toujours la même.

Ces effets doivent être étudiés conjointement, et non pas séparément comme nous l'avons fait en cours. On repère un point de la Terre par ses coordonnées sphériques (r, θ) . La longitude φ n'intervient pas à cause de l'invariance du problème par rotation. Un point de la surface est repéré par $r = R + h$ avec $h \ll R$.



Soit un point matériel de masse m situé en M et subissant la force \vec{F} dérivant de l'énergie potentielle $E_p(M)$ par $\vec{F} = -\text{grad} E_p(M)$. On introduit le champ $\vec{g}(M)$ et le potentiel $\Phi(M)$ associés définis par $\vec{F} = m\vec{g}(M)$ et $E_p(M) = m\Phi(M)$. Ils sont liés l'un à l'autre par $\vec{g} = -\text{grad} \Phi$. Ces concepts s'appliquent aussi bien aux forces de gravité qu'aux forces d'inertie.

1. Potentiel de gravitation de la Terre sphérique

Si la Terre était une boule de masse M , de rayon R et de masse volumique moyenne ρ_0 , le champ de gravité à la surface vaudrait $\vec{g}_0 = -g_0 \vec{u}_r$ avec

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} = \frac{G \times \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0}{R^2} = \frac{4\pi G \rho_0 R}{3} \quad . \quad (1)$$

Le potentiel de gravité créé par cette sphère est donné, pour $r \geq R$, par $\Phi_0 = -\frac{GM}{r}$. Pour $r = R + h$ avec $h \ll R$, un développement au premier ordre donne :

$$\Phi_0(R + h) = -\frac{GM}{R(1 + h/R)} \simeq -\frac{GM}{R} \left(1 - \frac{h}{R}\right) = -\frac{GM}{R} + g_0 h = \Phi(R) + g_0 h \quad .$$

On retrouve un résultat bien connu : pour des objets proches de la Terre, l'énergie potentielle de gravité vaut, à une constante près, $mg_0 h$.

2. Potentiel d'inertie d'entraînement

La force d'inertie d'entraînement est donnée par $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 H\vec{M}$. Si on utilisait des coordonnées cylindriques, on aurait $H\vec{M} = r \vec{u}_r$ et $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 r \vec{u}_r$. On voit que cette force dérive de l'énergie potentielle $E_{pie} = -\frac{1}{2}mr^2\omega^2 = -\frac{1}{2}mHM^2\omega^2$. Comme nous utilisons les coordonnées cylindriques, il convient de remplacer HM par $r \sin \theta$. Le potentiel associé à la force d'inertie s'exprime donc par

$$\Phi_{ie} = -\frac{1}{2}r^2\omega^2 \sin^2 \theta = -\frac{1}{2}(R + h)^2\omega^2 \sin^2 \theta \quad .$$

3. Forme de la Terre sans correction gravitationnelle

Dans une première approche, nous supposons que la déformation de la Terre n'affecte pas le potentiel gravitationnel. Le potentiel total est donc donné par

$$\Phi(h, \theta) = \Phi_0 + \Phi_{ie} = \Phi_0(R) + g_0 h - \frac{1}{2}(R+h)^2 \omega^2 \sin^2 \theta \quad . \quad (2)$$

On traite la Terre comme un volume de fluide en équilibre. Selon un théorème usuel de statique des fluides, sa surface est un ensemble de points tels que $\Phi = Cste$, ce qui permet en principe d'exprimer h en résolvant une équation du second degré. Pour éviter ces lourds calculs, on se contente d'un résultat approché. Si ω était nul, la Terre serait parfaitement sphérique et on sait d'ailleurs que c'est « presque » le cas. L'effet de la force d'inertie est assez modéré parce que l'accélération d'entraînement, voisine de $R\omega^2$, est très inférieure à g_0 . On le voit mieux en calculant le nombre sans dimension

$$q = \frac{R\omega^2}{g_0} \simeq 3,46 \cdot 10^{-3} \simeq \frac{1}{290} \quad .$$

En remplaçant ω^2 par qg_0/R , on a

$$\Phi(h, \theta) = \Phi_0(R) + g_0 h - \frac{qg_0}{2R}(R+h)^2 \sin^2 \theta \quad .$$

Les approximations consistent à chercher h au premier ordre en q , sous la forme $h = Rf(q)$ avec $f(q) = O(q) = o(1)$ (c'est à dire $h \ll R$). Dans la suite, on n'écrit pas les $o()$ mais on abandonne les termes négligeables. Dans le dernier terme de Φ par exemple, q se trouve en facteur donc on peut au premier ordre remplacer $R+h$ par R pour écrire

$$\Phi(h, \theta) \simeq \Phi_0(R) + g_0 h - \frac{qg_0}{2} R \sin^2 \theta \quad .$$

En écrivant $\Phi(h, \theta) = Cste$, on obtient l'expression de h définissant la forme de la Terre :

$$h(\theta) = \frac{Rq}{2} \sin^2 \theta + K = K' - \frac{Rq}{2} \cos^2 \theta \quad \text{avec} \quad K' = K + \frac{Rq}{2} \quad .$$

Dans ces expressions, les constantes K et K' s'interprètent comme les valeurs de h pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$, au pôle et à l'équation respectivement. Numériquement, on trouve $h_{eq} - h_{pole} = Rq/2 = 11$ km, bien éloigné de la valeur réelle de 21,5 km.

4. Conservation du volume

Telle qu'elle a été introduite, la constante K semble arbitraire. En réalité, on peut la trouver si on se fixe le volume total V_0 de la Terre. Si la Terre était parfaitement sphérique, on aurait $V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3$. Bien que déformée en un ellipsoïde de révolution, la Terre doit renfermer le même volume de matière. En coordonnées sphériques, un élément infinitésimal situé dans la Terre a pour volume $dV = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr$ avec $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ et $r \in [0, R+h(\theta)]$. D'où l'expression du volume

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^{R+h(\theta)} dr r^2 \sin \theta \\ &= 2\pi \int_0^\pi d\theta \frac{(R+h(\theta))^3}{3} \sin \theta \\ &= 2\pi \int_0^\pi \frac{R^3 + 3R^2 h + 3h^2 R + h^3}{3} \sin \theta d\theta \quad . \end{aligned}$$

Comme $h \ll R$, on néglige les termes d'ordre 2 et 3 en $h^2 R$ et en h^3 .

$$\begin{aligned} V &\simeq \frac{2\pi}{3} R^3 \int_0^\pi \sin \theta d\theta + 2\pi R^2 \int_0^\pi h \sin \theta d\theta \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3 + 2\pi R^2 \int_0^\pi h \sin \theta d\theta \quad . \end{aligned}$$

La condition de conservation du volume $V = V_0$ impose donc $\int_0^\pi h(\theta) \sin \theta d\theta = 0$. Avec $h(\theta) = \frac{1}{2} q a \sin^2 \theta + K$ et en utilisant $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 4/3$, on en déduit $K = -qR/3$ et donc

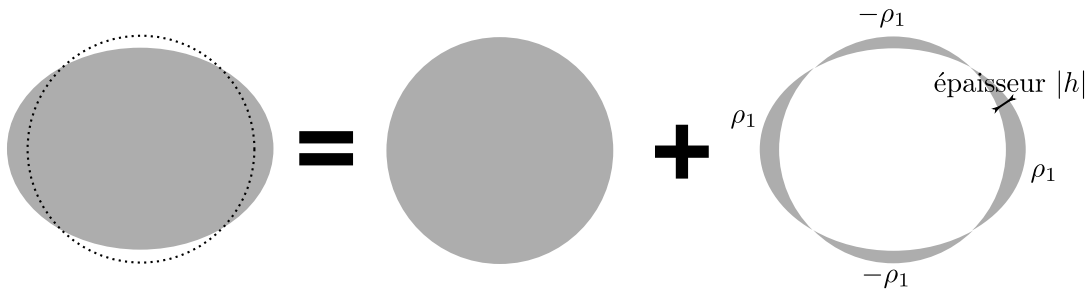
$$h = \frac{qR}{2} \left(\sin^2 \theta - \frac{2}{3} \right) \quad .$$

5. Correction du potentiel gravitationnel

Qualitativement, l'expression de h trouvée ci-dessus décrit bien la réalité, mais la différence $qR/2 = 11$ km entre le rayon équatorial et le rayon polaire est largement sous-estimée. Il paraît donc légitime de postuler que h est de la forme

$$h = h_0 \left(\sin^2 \theta - \frac{2}{3} \right)$$

en cherchant la valeur de h_0 avec plus de rigueur. Il faut pour cela tenir compte du fait que la Terre non sphérique crée un potentiel gravitationnel Φ_{grav} qui n'est pas exactement Φ_0 . Près des pôles, la surface de la Terre aplatie est plus proche de son centre et il « manque » en quelque sorte de la matière ; près de l'équateur elle en est plus éloignée et il y a au contraire un « surplus ». On peut voir la distribution de matière associée comme la superposition de la boule idéale de rayon R et d'une couche d'épaisseur $|h|$. Dans la région où $h > 0$, on attribue à cette couche la masse volumique ρ_1 des roches situées près de la surface. Dans la région où $h < 0$, on lui attribue la masse volumique $-\rho_1$.



Selon le principe de superposition, le potentiel gravitationnel s'écrit

$$\Phi_{\text{grav}}(M) = \Phi_0(M) + \Phi_1(M) \quad .$$

Le terme Φ_1 n'est pas facile à obtenir : la distribution de masse correspondante ne possède pas la symétrie sphérique donc on ne peut pas appliquer commodément le théorème de Gauss. Nous admettons¹ ici que

$$\Phi_1(r, \theta) = -\frac{4\pi\rho_1 GR^4 h_0}{5r^3} \left(\sin^2 \theta - \frac{2}{3} \right) \quad .$$

On voit apparaître dans cette expression les facteurs h_0 et $(\sin^2 \theta - 2/3)$ déjà présents dans l'expression de h . D'après la relation (1), on peut aussi remplacer $4\pi GR$ par $3g_0/\rho_0$ pour écrire

$$\Phi_1 = -\frac{3g_0\rho_1 R^3}{5\rho_0 r^3} h \quad .$$

6. Nouvelle détermination de l'aplatissement

Pour obtenir le potentiel, il suffit de modifier la relation (2) en ajoutant le terme Φ_1 .

$$\Phi(r, \theta) = \Phi_0(r, \theta) + \Phi_1(r, \theta) + \Phi_{ie}(r, \theta) \quad (3)$$

Pour $r = R + h$, on obtient

$$\Phi(R + h, \theta) = \Phi_0(R) + g_0 h - \frac{3g_0\rho_1 R^3}{5\rho_0 (R + h)^3} h - \frac{qg_0}{2R} (R + h)^2 \sin^2 \theta \quad . \quad (4)$$

Comme plus haut, $h \ll R$ donc on peut, au premier ordre en q , confondre $(R + h)$ avec R dans les deux derniers termes.

$$\begin{aligned} \Phi &\simeq \Phi_0(R) + g_0 h - \frac{3g_0\rho_1}{5\rho_0} h - \frac{qg_0}{2} R \sin^2 \theta \\ &\simeq \Phi_0(R) + g_0 \left(1 - \frac{3\rho_0}{5\rho_1} \right) h - \frac{qg_0}{2} R \sin^2 \theta \end{aligned}$$

1. Une démonstration de ce résultat est proposée en annexe.

La surface de la Terre est un ensemble de points M tels que $\Phi(M) = Cste$, d'où on déduit

$$h(\theta) = h_0 \sin^2 \theta + K'' \quad \text{avec} \quad h_0 = \frac{Rq}{2\left(1 - \frac{3\rho_1}{5\rho_0}\right)} .$$

La conservation du volume permet d'éliminer K'' pour écrire

$$h(\theta) = h_0 \left(\sin^2 \theta - \frac{2}{3} \right) .$$

La longueur h_0 représente l'écart $R_{\text{eq}} - R_{\text{pole}}$ entre le rayon équatorial et le rayon polaire.

7. Application numérique

On prend $\rho_0 = 5,512 \text{ t.m}^{-3}$, masse volumique moyenne de la Terre. La valeur de ρ_1 est plus mystérieuse : dans ce modèle, c'est la masse volumique d'une couche déformable située en surface avec une épaisseur de l'ordre de quelques dizaines de kilomètre. La masse volumique de la croûte terrestre² est de 3 t.m^{-3} , celle du manteau supérieur de $4,1 \text{ t.m}^{-3}$. En prenant $\rho_1 = 3,5 \text{ t.m}^{-3}$, on trouve

$$h_0 = 18 \text{ km} .$$

Ce résultat est assez proche des 21,5 km mesurés. On reproduit plus précisément cette valeur expérimentale en choisissant $\rho_1 = 4,5 \text{ t.m}^{-3}$, ce qui n'est pas très clair d'un point de vue géologique. Dans la suite, c'est cette valeur qui sera utilisée.

8. Retour au champ de pesanteur

L'expression de h_0 étant maintenant connue, réécrivons le potentiel en tenant compte de $\Phi_0 = -GM/r$.

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{GM}{r} - \frac{4\pi\rho_1 GR^4 h_0}{5r^3} \left(\sin^2 \theta - \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{2} r^2 \omega^2 \sin^2 \theta$$

Le champ de pesanteur s'en déduit par

$$\vec{g} = -\text{grad } \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \vec{u}_\theta = g_r \vec{u}_r + g_\theta \vec{u}_\theta .$$

La composante radiale contient le terme gravitationnel g_0 , très supérieur aux autres termes qui sont d'ordre q . Dans ces conditions, on montre facilement que la norme du champ est presque donnée par $g = |g_r|$.

$$g_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{GM}{r^2} - \frac{9}{5} \frac{\rho_1 h_0 R^3 g_0}{\rho_0 r^4} \left(\sin^2 \theta - \frac{2}{3} \right) + \frac{qg_0}{R} r \sin^2 \theta .$$

Dans le second terme, on a remplacé $4\pi GR$ par $3g_0/\rho_0$ et dans le troisième ω^2 par qg_0/R . Pour avoir le champ de gravité à la surface de la Terre, on l'évalue en $r = R+h$. Comme le second et le troisième termes sont proportionnels à h_0 et q , on obtient une réponse au premier ordre en q en y remplaçant $R+h$ par R . Pour le premier terme,

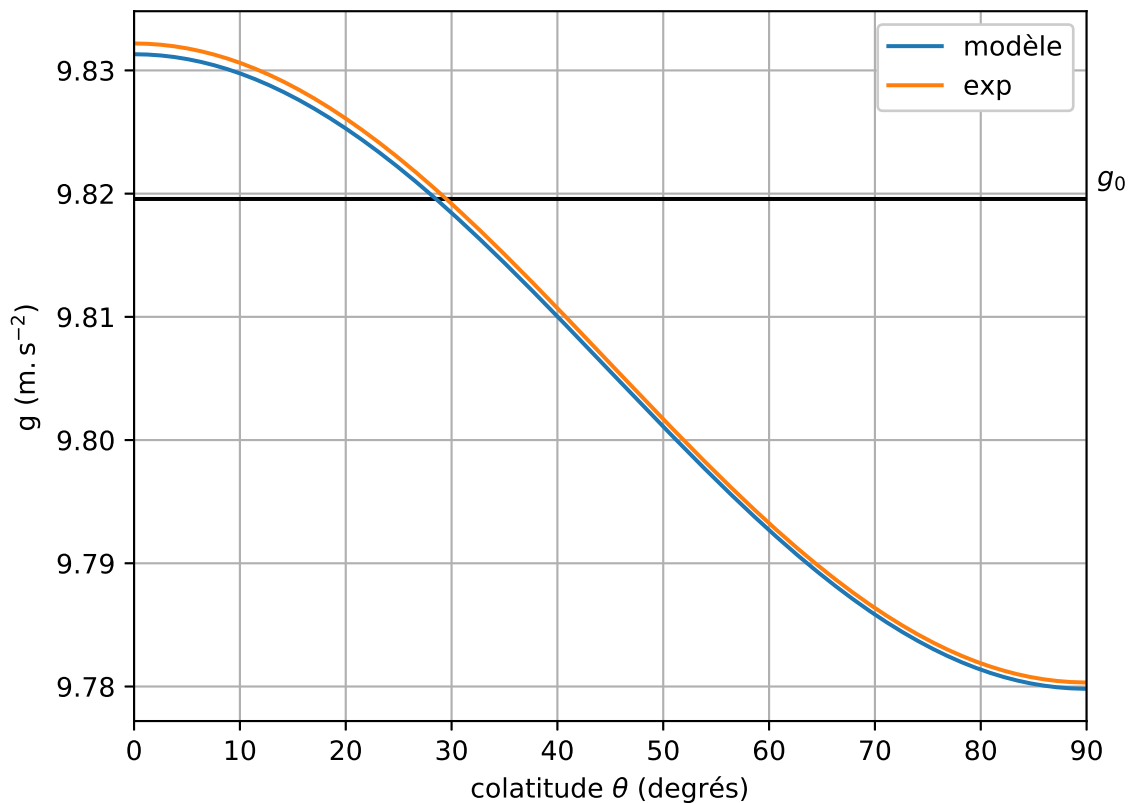
$$-\frac{GM}{(R+h)^2} = -\frac{GM}{R^2} \frac{1}{(1+h/R)^2} = -\frac{GM}{R^2} \left(1 - \frac{2h}{R} \right) = -g_0 + \frac{2g_0 h}{R} = -g_0 + \frac{2g_0 h_0}{R} \left(\sin^2 \theta - 2/3 \right)$$

On voit que l'évaluation du terme à symétrie sphérique à la distance $R+h$ (et non pas R) contribue à la variation de g . En ajoutant les deux derniers termes, on obtient finalement

$$g_r = -g_0 \left(1 + \frac{4h_0}{3R} - \frac{6\rho_1 h_0}{5\rho_0 R} \right) + g_0 \left(q + \frac{2h_0}{R} - \frac{9\rho_1 h_0}{5\rho_0 R} \right) \sin^2 \theta .$$

Le premier terme est constant et s'écarte légèrement du champ gravitationnel sphérique g_0 . Le second terme dépend de θ et montre que le champ est plus fort aux pôles qu'à l'équateur. Avec $\rho_1 = 4,5 \text{ t.m}^{-3}$ on obtient la courbe représentée ci-dessous, qui ne s'écarte pas de plus de 10^{-3} m.s^{-2} des relevés expérimentaux. L'écart entre le champ maximal (environ $9,83 \text{ m.s}^{-2}$ aux pôles) et le champ minimal (environ $9,78 \text{ m.s}^{-2}$ à l'équateur) est de $0,052 \text{ m.s}^{-2}$. Aux latitudes françaises ($\theta \simeq 45^\circ$), g est légèrement inférieur à $9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

2. <http://www.astronoo.com/fr/articles/structure-de-la-terre.html>

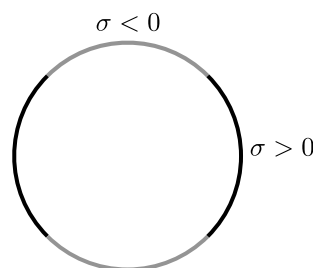


9. Annexe : détermination du potentiel Φ_1 (avec notions hors programme)

La couche d'épaisseur $|h(\theta)|$ portant la matière de masse volumique $\pm\rho_1$ crée un potentiel gravitationnel $\Phi_1(r, \theta)$. Comme $|h| \ll R$, on la décrit comme une répartition surfacique de matière couvrant la sphère de rayon R . Le passage de la description volumique à la description surfacique est donné par

$$\sigma(\theta) = \rho_1 h(\theta) = \rho_1 h_0 \left(\sin^2 \theta - \frac{2}{3} \right) .$$

La masse surfacique σ , en kg.m^{-2} , est négative près des pôles et croît progressivement en direction de l'équateur où elle est positive.



Pour la suite, il est fondamental de remarquer que

$$\sin^2 \theta - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \cos^2 \theta = -\frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) = -\frac{2}{3} P_2(\cos \theta) \quad \text{avec} \quad P_2(X) = \frac{3}{2} X^2 - \frac{1}{2} .$$

On appelle P_2 « polynôme de Legendre de degré 2 ». En physique mathématique, la fonction $\theta \rightarrow P_2(\cos \theta)$ est bien connue : il s'agit de l'harmonique sphérique $Y_{2,0}(\theta)$ et elle fait partie de la grande famille des harmoniques sphériques $Y_{\ell,m}$. Il n'est pas question ici de proposer un cours sur ces fonctions, mais simplement d'utiliser deux de leurs propriétés.

- Toute fonction des coordonnées sphériques (r, θ) présentant un Laplacien nul sur un domaine ouvert peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} Y_{\ell,0}(\theta) \left(Ar^{\ell} + Br^{-(\ell+1)} \right) .$$

- Lorsque la répartition de masse présente des variations angulaires décrites par une seule harmonique sphérique, le potentiel est lui même proportionnel à cette harmonique sphérique. La somme précédente ne contient donc qu'un seul terme.

Dans le cas qui nous occupe, l'équation de Maxwell-Gauss gravitationnelle $\Delta\Phi = -4\pi G\rho$, écrite dans le vide, montre que le potentiel $\Phi_1(r, \theta)$ vérifie l'équation de Laplace pour $r < R$ et pour $r > R$. Comme σ est proportionnelle à $P_2(\cos\theta) = Y_{2,0}(\theta)$, Φ_1 lui est aussi proportionnel sur chacun des deux domaines. Il existe donc 4 constantes A_1, B_1, A_2 et B_2 telles que³

$$\begin{aligned} \text{pour } r < R, \quad \Phi_1 &= \left(\frac{A_1}{r^3} + B_1 r^2 \right) \left(\sin^2 \theta - \frac{2}{3} \right) \\ \text{pour } r > R, \quad \Phi_2 &= \left(\frac{A_2}{r^3} + B_2 r^2 \right) \left(\sin^2 \theta - \frac{2}{3} \right) . \end{aligned}$$

Le potentiel est défini en 0, donc $A_1 = 0$. Le potentiel est borné pour $r \rightarrow \infty$, donc $B_2 = 0$. Le potentiel est continu en $r = R$ donc

$$\forall \theta, B_1 R^2 \left(\sin^2 \theta - \frac{2}{3} \right) = \frac{A_2}{R^3} \left(\sin^2 \theta - \frac{2}{3} \right) \quad \text{donc} \quad B_1 = \frac{A_2}{R^5} .$$

Enfin, la présence de masse surfacique en $r = R$ entraîne une discontinuité de la composante radiale g_{1r} du champ $\vec{g}_1 = -\vec{\nabla}\Phi_1$. L'expression de cette discontinuité est donnée par un résultat hors programme⁴ :

$$g_{1r}(R^+) - g_{1r}(R^-) = -4\pi G\sigma .$$

Comme $g_{1r} = -\partial\Phi_r/\partial r$, on en déduit

$$\frac{3A_2}{R^4} \left(\sin^2 \theta - \frac{2}{3} \right) + 2B_1 R \left(\sin^2 \theta - \frac{2}{3} \right) = -4\pi G\rho_1 h_0 \left(\sin^2 \theta - \frac{2}{3} \right) .$$

On élimine B_1 au profit de A_2 pour finalement obtenir

$$A_2 = -\frac{4\pi G h_0 R^4 \rho_1}{5} \quad \text{puis} \quad \Phi_1 = -\frac{4\pi G R^4 \rho_1 h_0}{5r^3} \left(\sin^2 \theta - \frac{2}{3} \right) \quad \text{pour } r \geq R .$$

Référence :

B. Lautrup, Physics of continuous matter

3. oups, j'ai inversé les variables A et B !

4. On rencontre la même idée en électrostatique.