

Nom :  
 (Suivi, s'il y a lieu, du nom d'épouse)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Prénom :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

N° d'inscription :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Né(e) le :    /    /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émergence)

Python

Concours

--	--	--

Section/Option

--	--	--	--	--

Epreuve

--	--	--	--	--

Matière

--	--	--	--	--

Ex 1.

a. Si  $P \neq 0$ ,  $\frac{P(k+1)/P(k)}{k \rightarrow \infty} \rightarrow 1$

donc  $\left| \frac{P(k+1)/(k+1)!}{P(k)/k!} \right| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$  : ~~par la conv abs~~ par la règle de d'Al.

b. Direct.

d.  $S(H_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$ .

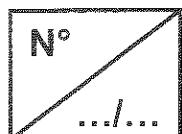
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $S(H_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k \cdots (k-n+1)}{k!} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!/(k-n)!}{k!}$

$$H_n = x \cdots (x-n+1) \quad \text{mult. n } 0 \leq k \leq n-1$$

$$S(H_n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k-n)!} = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{l!} = e.$$

e. Notons  $d = \deg(P)$ .  $(H_0, \dots, H_d)$  est une base de  $\mathbb{R}_d[x]$  (famille éch en deg etc.).

f. Si  $y \in S(1)$ ,  $S(P) = E(P(y))$ .



Ex 2.

c. Hyp(i). Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tq  $u_{n+1} \leq u_n$ .

Alors  $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{n+2} \leq \frac{u_n^2}{n+1} = u_{n+1}$

Ainsi, la suite est décroissante à partir d'un certain rang  $n_0$ .  
(on prend  $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} \leq u_n\}\}$ ).

Elle est donc conv. Notons  $l$  la limite.  $u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l^2 > 0$

donc  $l=0$ . On a prouvé (i)  $\Rightarrow$  (iii).

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) décombe de la déf de la limite.

Hyp: (ii) Prenons un tel  $n$ . Alors  ~~$u_n \leq u_{n+1}$~~  Hyp

~~$u_{n+1} \leq \frac{u_n^2}{n+1} \leq u_n^2 \leq u_n$~~

On a prouvé (ii)  $\Rightarrow$  (i).

d. Encore une réc.

~~Si~~  $u_n \geq n+2$ , alors  $u_{n+1} \geq \frac{(n+2)^2}{n+1}$

or  $\frac{(n+2)^2}{n+1} - (n+3) = \frac{(n^2+4n+4) - (n^2+4n+3)}{n+1} = \frac{1}{n+1} \geq 0$  donc  $u_{n+1} \geq n+3$ .

e. ~~Si~~  $x=1$  donne  $u_1=1$  puis  $u_2=\frac{1}{2} < 1$  donc la suite conv vers 0.

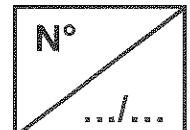
~~Si~~  $x=2$  nous place dans le cas de la question d donc  $u_{n+2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

f. Si  $0(x \leq y)$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n(x) \leq u_n(y)$  (réc)  
donc  $(y \in E_0 \Rightarrow x \in E_0)$  et  $(x \in E_\infty \Rightarrow y \in E_\infty)$   
donc  $E_0$  et  $E_\infty$  sont des intervalles.

Soit  $x \in ]0, +\infty[ \setminus E_0$ . Alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} > u_n$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $\frac{u_n^2}{n+1} > u_n$  donc  $u_n > n+1$ .

Donc  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ .



Ex3-

a.  $\{ (p, q) \in \mathbb{N}^2; n = 2p + 3q \} \subset \{0, n\}^2$   
 donc il est fini.  $\sigma(n)$  est bien défini.

b.  $0 = 2 \times 0 + 3 \times 0, \quad 1 = \dots$  pas de sol.  
 $2 = 2 \times 1 + 3 \times 0, \quad \sigma(0) = 1, \sigma(1) = 0, \sigma(2) = 1$ .

c. ~~égalité~~  $2p + 3q = n \Rightarrow 0 < p \leq \frac{n}{2}$ .

Pour un  $p$  donné, il y a au plus un  $q$  convenable.

donc  $1 \leq \sigma(n) \leq \frac{n}{2}$  (même  $\frac{n}{3}$ ).

rayon  $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n) \geq$  rayon  $(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) x^n) \geq$  rayon  $(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n)$

donc rayon 1.

d. fin.  $2p = 2 \times p + 3 \times 0$  donc  $\sigma(2p) \geq 1$ .

Soit  $p \geq 1$ .  $2p+1 = 2(p+1) + 3 \times 1$  donc  $\sigma(2p+1) \geq 1$ .

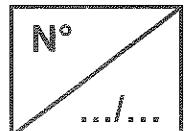
$$e. \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3} = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \right) \times \left( \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k \right)$$

$$\text{avec } a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } 2|k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad b_k = \begin{cases} 1 & \text{si } 3|k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)}_{c_n} x^n.$$

$$c_n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} 1 & \text{si } 2|k \text{ et } 3|n-k \\ 0 & \text{sinon} \end{bmatrix}^n$$

$$= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{bmatrix} 1 & \text{si } 3|n-2p \\ 0 & \text{sinon} \end{bmatrix} = \sigma(n).$$



Ex 9.

b.  $n = 4p+1$ . somme =  $4p$ .

c.  $B_n = \frac{1}{4p} M_n$ .  $B_n \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ j \\ 2i_{2p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ j \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Soit  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B_n) \setminus \{1\}$ . Soit  $U = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{2p} \end{pmatrix}$  un vect pr associé.

~~$\forall k \in [0, 2p]$ ,  $\lambda u_k = \frac{1}{4p} \left( \sum_{j \neq k} (1 \text{ ou } 3) u_j \right)$ .~~

On prend  $k$  tel que  $|u_k| = \|U\|_\infty$ .

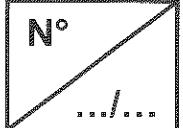
$$|\lambda| \cdot |u_k| \leq \frac{1}{4p} \sum (1 \text{ ou } 3) |u_j| \leq \frac{|u_k|}{4p} \sum (1 \text{ ou } 3) = |u_k|$$

donc  $|\lambda| \leq 1$ . Si égalité alors  $\forall j \neq k, |u_j| = |u_k|$

et même argument (cas d'égalité de l'inéq triang) donc les  $u_j$  sont tous égaux donc  $\lambda = 1$  : impossible

Donc  $|\lambda| < 1$ .

d. Très difficile.



Nom :  (Suivi, s'il y a lieu, du nom d'épouse)

Prénom : N° d'inscription : Né(e) le :  /  / 

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

Concours

Section/Option

Epreuve

Matière

Ex 10.

b. Par rec :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n \leq 1$ .  
(d'ordre 3)

$$c. u_{n+2} = a_{n+3} - a_{n+2} = \frac{a_n - a_{n+2}}{n+3} = \frac{-u_{n+1} - u_n}{n+3}.$$

~~La suite~~  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq 2$  donc  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+2}| \leq \frac{2}{n+3}$   
donc  $\forall n \geq 2, |u_n| \leq \frac{2}{n+1}$

~~Par conséquent~~  $\sum (a_n - a_{n+1})$  convergente

$$\text{puis } \forall n \geq 2, |u_{n+4}| \leq \frac{\frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+1}}{n+3} \leq \frac{4}{n^2}$$

donc  $\sum u_n$  conv donc  $\sum (a_{n+1} - a_n)$  conv

donc la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  conv.

d.  $(a_n x^n)_{n \geq 0}$  est bornée donc  $\limsup a_n \geq 1$ .

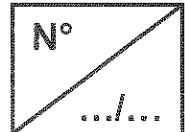
$$e. f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \quad \forall x \in ]-1, 1[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+3)a_{n+3} x^{n+2} + 2a_2 x + a_1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)a_{n+2} x^{n+2} + a_n x^{n+2}] + 2x$$

$$= x [f'(x) - a_1] + x^2 f(x).$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} f(x).$$



Ex 11. a.  $\left| \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) \right| \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} |\ln(t)|$   $\int_0^\infty |\ln(t)| dt$  conv.

d.  $f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) & si \ t \in ]0, n[ \\ 0 & si \ t \geq n. \end{cases}$

① Soit  $t \rightarrow \infty$   $f$  est cont par morce (et même cont).

② Soit  $t > 0$ . Soit un entier  $n > t$ .

$$f_n(t) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \ln(t)$$

$$\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{t}{n} \text{ donc } n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -t$$

cont de  $\exp$ :  $f_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{e^{-t} \ln(t)}{f(t)}$ .

$f$  est cont.

③  $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$  donc  $|f_n(t)| \leq e^{-t} |\ln(t)|$  si  $t \leq n$

(vrai aussi si  $f_n(t) = 0 \dots$ )

Reste à prouver que  $f$  est intégrable.

En 0:

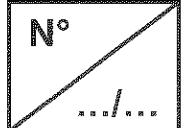
$$|f(t)| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} |\ln(t)|$$

En  $+\infty$ :

$$f(t) = o(e^{-t/2})$$

Ex 12.  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e$

donc  $f(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\infty}$



Ex 14.

$$u_n = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1-t^{n+1}}} dt$$

$f_n(t)$

① Pour tout  $n \geq 1$ ,  $f_n$  est cont sur  $[0, 1]$ .

② Pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1-t}{f(t)}}$   
 $f$  est cont.

③  $|f_n(t)| = \frac{1}{\sqrt{1+t+\dots+t^n}} \leq 1.$

Conv dom:

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 \sqrt{1-t} dt = \frac{2}{3}.$$

Ex 16. a)  $X_1(\Omega) = \{1, n\}$ .  $B_k = \{\text{la boule } n \text{ sort au } k\text{-ième tirage}\}$

$$[X_1 = k] = B_k = \overline{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}} \cap B_k.$$

$$\begin{aligned} \text{Probas composées: } P(X_1 = k) &= P(\overline{B_1}) P(\overline{B_2} | \overline{B_1}) \dots P(\overline{B_{k-1}} | \overline{B_1 \cap \dots \cap B_{k-2}}) \\ &\quad \times P(B_k | \overline{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}) \end{aligned}$$

$$P(X_1 = k) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \times \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}.$$

$$X_1 \hookrightarrow U([1, n]). \quad E(X_1) = \frac{n+1}{2}, \quad V(X_1) = \frac{n^2-1}{12}.$$

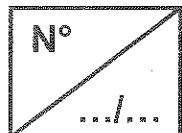
b) Sachant  $[X_1 = j]$  de  $X_2$  est  $U([1, j-1])$  (même raisonnement).

$$X_2(\Omega) = \{1, n-1\}.$$

$$P(X_2 = k) * = \sum_{j=k+1}^n P(X_2 = k | X_1 = j) P(X_1 = j) = \frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^n \frac{1}{j-1}.$$

$$E(X_2) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k}^{n-1} \frac{1}{l} = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq l \leq n-1} \frac{1}{l} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=1}^l \frac{1}{l} = 1$$

$$(E(X_2) = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}).$$



Ex 17.

Sachant qu'il gagne  
en 3

les deux mènes

la troisième

c-

$$P(Y_3 = n+k \mid Y_2 = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3}.$$

d.  $P(Y_3 - Y_2 = k \mid Y_2 = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3}$  ↗ pas de ne dép

~~Intégrer~~  $P(Y_3 - Y_2 = k) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(Y_3 - Y_2 = k \mid Y_2 = n) P(Y_2 = n)$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{+\infty} P(Y_2 = n) \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} 1}_{=1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3}.$$

$$Y_3 - Y_2 \hookrightarrow G\left(\frac{1}{3}\right)$$

Ex 20.

c.  $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & 4 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \end{pmatrix}.$

Soit  $\lambda$  un réel pr et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  un vect pr associé.

Notons  $\alpha = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n$ .

$$\alpha = x_1 + (2x_2 + \cdots + nx_n) = x_1 + \lambda x_1 = (\lambda + 1)x_1.$$

$$\alpha = 2x_2 + (x_1 + 3x_3 + \cdots + nx_n) = 2x_2 + \lambda x_2 = (\lambda + 2)x_2$$

$$\vdots = \vdots = \vdots = \vdots = (\lambda + n)x_n.$$

$$\alpha = \sum_{k=1}^n kx_k = \sum_{k=1}^n \frac{k}{\lambda + k} \alpha \quad \text{donc} \quad 1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda + k}.$$

Hm... ça fait beaucoup de divisions non justifiées.

dém Si  $\lambda + 1 = 0$ , alors  $\alpha = 0$  donc  $x_2, \dots, x_n = 0$  mais  $x_1 \neq 0$ . Faux.

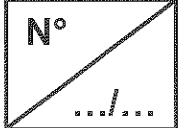
Idem pour les autres

d. On a besoin de la réciproque du calcul précédent.

Si  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda + k} = 1$ , alors  $\left(\frac{1}{\lambda+1}, \dots, \frac{1}{\lambda+n}\right)$  donne un vect pr.

$$f(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow -2}{\longrightarrow} +\infty, \quad f(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow -\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad +\text{val int} \rightarrow \text{exist}$$

$$f'(\lambda) = \sum \frac{-k}{(\lambda+k)^2} < 0 \rightarrow \text{unic}.$$



$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$a = P(A), b = P(B), c = P(A \cap B)$$

$$P(A)P(B) = P(A \cap B)P(B) + P(A \cap \bar{B})P(\bar{B})$$

$$P(A \cap B)P(\bar{B}) \neq P(A \cap \bar{B})P(B)$$

	B	$\bar{B}$
A	$A \cap B$	$A \cap \bar{B}$
$\bar{A}$	$\bar{A} \cap B$	$\bar{A} \cap \bar{B}$

$$u_{n+1} > u_n \xrightarrow{n+1} \text{unstable } u_n$$

$$u_n > n+1$$

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}} + \frac{2}{\lambda_n+2} + \sum_{k=3}^n \frac{k}{\lambda+k} = 1 \quad \frac{k}{\lambda+k} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+k}.$$

$$-\lambda_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_n+k} = 1-n \quad \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_n+k} \right| = \frac{n-1}{\lambda_n}.$$

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\lambda_n+k}}_{>0} = \frac{n-1}{\lambda_n} \rightarrow -\infty$$

$$\text{done } \frac{1}{\lambda_{n+1}} \rightarrow -\infty \quad \text{done } \lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -1. \quad \lambda_n = -1 + \varepsilon_n.$$

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\lambda_n+k} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\varepsilon_n+k-1} = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{l+\varepsilon_n}. \quad \text{Gavant à peu près } \ln(n)$$

$$\text{done } \frac{1}{\varepsilon_n} + (\sim \ln(n)) = (\sim \varepsilon_n)$$

$$\text{Bref } \varepsilon_n \sim -\frac{1}{n} \text{ et } \cancel{\text{done}}$$

$$\boxed{\lambda_n = -1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}.$$