Modèle EN2D ©NEOPTEC

Nom :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'épouse)

Prénom :

N° d'inscription : Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

Python

Concours | Section/Option | Epreuve | Matière

Ex 1.

a. Si $P \neq 0$, $P(k+1)/P(k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$

donc $\left|\dfrac{P(k+1)/(k+1)!}{P(k)/k!}\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$: ~~rayon~~ conv abs par la règle de d'Al.

b. Direct.

d. $S(H_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S(H_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{k\cdots(k-n+1)}{k!}}_{\text{nul si } 0\leq k\leq n-1} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!/(k-n)!}{k!}$

$H_n = X\cdots(X-n+1)$

$S(H_n) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k-n)!} \underset{l=k-n}{=} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{l!} = e.$

e. Notons $d = \deg(P)$. $(H_0, \dots, H_d)$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$ (famille éch en deg etc.).

f. Si $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$, $S(P) = E(P(Y))$.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

N° .../...

Ex 2.

c. Hyp (i). Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $u_{n_0+1} \leq u_{n_0}$.

Alors $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{n+2} \leq \dfrac{u_n^2}{n+1} = u_{n+1}$

Ainsi, la suite est décr à partir d'un certain rang n_0.
(on prend $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} \leq u_n\}$).
Elle est donc conv. Notons l la limite. $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l^2 \times 0$
donc $l=0$. On a prouvé (i) $\Rightarrow$ (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii) découle de la déf de la limite.

Hyp: (ii) Prenons un tel n. Alors ~~$u_n^2 \leq u_n \leq$~~
$u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{n+1} \leq u_n^2 \leq u_n$.

On a prouvé (ii) $\Rightarrow$ (i).

d. Encore une réc.
Si $u_n \geq n+2$, alors $u_{n+1} \geq \dfrac{(n+2)^2}{n+1}$
or $\dfrac{(n+2)^2}{n+1} - (n+3) = \dfrac{(n^2+4n+4)-(n^2+4n+3)}{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq n+3$.

e. $x=1$ donne $u_1 = 1$ puis $u_2 = \dfrac{1}{2} < 1$ donc la suite conv vers 0

$x=2$ ~~donne~~ nous place dans le cas de la question d donc $u_n(2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

f. Si $0 < x \leq y$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \leq u_n(y)$ (réc)
donc $(y \in E_0 \Rightarrow x \in E_0)$ et $(x \in E_\infty \Rightarrow y \in E_\infty)$
donc E_0 et E_∞ sont des intervalles.

Soit $x \in]0,+\infty[\setminus E_0$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\dfrac{u_n^2}{n+1} > u_n$ donc $u_n > n+1$.

Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

N° ..../....

Ex 3.

a. $\cancel{}$ $\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 ; n = 2p+3q\} \subset [\![0,n]\!]^2$
donc il est fini! $\sigma(n)$ est bien défini.

b. $0 = 2\times 0 + 3\times 0$, $1 = \dots$ pas de sol.
$2 = 2\times 1 + 3\times 0$! $\sigma(0) = 1$, $\sigma(1) = 0$, $\sigma(2) = 1$.

d. $\cancel{(p,q)}$ $2p+3q = n \Rightarrow 0 \leq p \leq \frac{n}{2}$.
Pour un p donné, il y a au plus un q convenable.
donc $1 \leq \sigma(n) \leq \frac{n}{2}$ (même $\frac{n}{3}$).

$\underbrace{\text{rayon}\left(\sum x^n\right)}_{=1} \geq \text{rayon}\left(\sum \sigma(n) x^n\right) \geq \underbrace{\text{rayon}\left(\sum n x^n\right)}_{=1}$

donc rayon 1.

b. fin $2p = 2\times p + 3\times 0$ donc $\sigma(2p) \geq 1$.

Soit $p \geq 1$. $2p+1 = 2\times(p-1) + 3\times 1$ donc $\sigma(2p+1) \geq 1$.

e. $$\frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k\right)$$

avec $a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } 2|k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $b_k = \begin{cases} 1 & \text{si } 3|k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)}_{} x^n.$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} 1 & \text{si } 2|k \text{ et } 3|n-k \\ 0 & \text{sinon} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \begin{bmatrix} 1 & \text{si } 3|n-2p \\ 0 & \text{sinon} \end{bmatrix} = \sigma(n).$$

N° .../...

Ex 9.

b. $n = 2p+1$. somme $= 4p$.

c. $B_n = \frac{1}{4p} M_n$. $B_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(B_n) \setminus \{1\}$. Soit $U = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{2p} \end{pmatrix}$ un vect pr associé.

$\forall k \in [\![0, 2p]\!]$, $\lambda u_k = \frac{1}{4p} \left(\sum_{j \neq k} (1 \text{ ou } 3)\, u_j \right)$.

On prend k tel que $|u_k| = \|U\|_\infty$.

$|\lambda| \times |u_k| \leqslant \frac{1}{4p} \sum (1 \text{ ou } 3) |u_j| \leqslant \frac{|u_k|}{4p} \sum (1 \text{ ou } 3) = |u_k|$

donc $|\lambda| \leqslant 1$. Si égalité alors $\forall j \neq k$, $|u_j| = |u_k|$

et même argument (cas d'égalité de l'inég triang) donc les u_j sont tous égaux donc $\lambda = 1$: impossible

Donc $|\lambda| < 1$.

d. Très difficile.

N° .../...

Modèle EN2D ©NEOPTEC

Nom :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'épouse)

Prénom :

N° d'inscription : Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

Concours	Section/Option	Epreuve	Matière

Ex 10.

b. Par réc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq a_n \leq 1$.
(d'ordre 3)

c. $u_{n+2} = a_{n+3} - a_{n+2} = \dfrac{a_n - a_{n+2}}{n+3} = \dfrac{-u_{n+1} - u_n}{n+3}$.

~~La suite~~ $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leq 2$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+2}| \leq \dfrac{2}{n+3}$

~~donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.~~ ~~Ainsi,~~ $\forall n \geq 2, \ |u_n| \leq \dfrac{2}{n+1}$

~~Rayon $(\sum a_n x^n) \geq$ Rayon~~

puis $\forall n \geq 2, \ |u_{n+4}| \leq \dfrac{\frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+1}}{n+3} \leq \dfrac{4}{n^2}$

donc $\sum |u_n|$ conv donc $\sum (a_{n+1} - a_n)$ conv

donc la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ conv.

d. $(a_n 1^n)_{n \geq 0}$ est bornée donc rayon ≥ 1.

e. $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. $\forall x \in]-1,1[, \ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$
$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$

$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+3) a_{n+3} x^{n+2} + 2a_2 x + \underbrace{a_1}_{=0}$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2) a_{n+2} x^{n+2} + a_n x^{n+2} \right] + 2x$

$= x \left[f'(x) - \underbrace{a_1}_{=0} \right] + x^2 f(x)$.

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} f(x).}$$

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

N° .../...

Ex 11. a. $\left|\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\right| \underset{t\to 0}{\sim} |\ln(t)|$ $\quad \int_0^n \ln(t)\,dt$ conv.

d. $f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t) & \text{si } t \in]0,n[\\ 0 & \text{si } t \geq n. \end{cases}$

① ~~Soit $t>0$~~ f est cont par morc (et même cont).

② Soit >0. Soit un entier $n>t$:

$f_n(t) = \exp\left(n \ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right) \ln(t)$

$\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{t}{n}$ donc $n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -t$

cont de exp : $f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underbrace{e^{-t}\ln(t)}_{f(t)}$.

f est cont.

③ $\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$ donc $|f_n(t)| \leqslant e^{-t}|\ln(t)|$
si ~~t~~ $t<n$

(vrai aussi si $f_n(t) = 0$ ...).

Reste à prouver que f est intégrable.

En 0 : $\quad |f(t)| \underset{t\to 0}{\sim} |\ln(t)|$

En ~~$+\infty$~~ : $\quad f(t) = o\left(e^{-t/2}\right)$.

Ex 12. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \cancel{\ } e$

donc $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} e x$

N° .../...

Ex 14. $u_n = \int_0^1 \underbrace{\sqrt{\frac{1-t}{1-t^{n+1}}}}_{f_n(t)} \, dt$

(1) Pour tout $n \geq 1$, f_n est cont sur $[0,1[$.

(2) Pour tout $t \in [0,1[$, $f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underbrace{\sqrt{1-t}}_{f(t)}$

f est cont.

(3) $|f_n(t)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+t+\dots+t^n}} \leq 1$.

Conv dom : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sqrt{1-t}\, dt = \frac{2}{3}$.

Ex 16. a. $X_1(\Omega) = [\![1,n]\!]$. $B_k = [\text{La boule } n \text{ sort au } k\text{-ième tirage}]$

$[X_1=k] = B_k = \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k$.

Probas composées : $P(X_1=k) = P(\overline{B_1})\, P(\overline{B_2} \mid \overline{B_1}) \dots P(\overline{B_{k-1}} \mid \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-2}})$
$\times P(B_k \mid \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}})$

$P(X_1=k) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \times \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}$.

$X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$. $E(X_1) = \frac{n+1}{2}$, $V(X_1) = \frac{n^2-1}{12}$.

b. Sachant $[X_1=j]$ la loi de X_2 est $\mathcal{U}([\![1,j-1]\!])$ (même raisonnement).

$X_2(\Omega) = [\![1,n-1]\!]$.

$P(X_2=k) = \sum_{j=k+1}^{n} P(X_2=k \mid X_1=j)\, P(X_1=j) = \frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j-1}$.

$= \frac{1}{n} \sum_{\ell=k}^{n-1} \frac{1}{\ell}$

$E(X_2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\ell=k}^{n-1} \frac{1}{\ell} = \frac{1}{n} \sum_{1\leq k\leq \ell\leq n-1} \frac{1}{\ell} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \underbrace{\sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{\ell}}_{=1}$

$\boxed{E(X_2) = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}}$.

N° .../...

Ex 17.

c. $\overbrace{1 \quad\quad n}^{\text{Sachant qu'il y en a en 2}}$ $\overbrace{n+1 \quad\quad n+k-1}^{\text{les deux mêmes}}$ $\overbrace{n+k}^{\text{la troisième}}$

$$P(Y_3 = n+k \mid Y_2 = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3}.$$

d. $P(Y_3 - Y_2 = k \mid Y_2 = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3}$ ne dép pas de n

~~indép de~~ $P(Y_3 - Y_2 = k) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(Y_3 - Y_2 = k \mid Y_2 = n)\, P(Y_2 = n)$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} P(Y_2 = n)}_{=1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3}.$$

$$Y_3 - Y_2 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$$

Ex 20.

c. $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & 4 \cdots & n \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 1 & \cdots & \cdots & n-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit λ une val pr et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vect pr associé.

Notons $\alpha = x_1 + 2x_2 + \cdots + n x_n$.

$\alpha = x_1 + (2x_2 + \cdots + n x_n) = x_1 + \lambda x_1 = (\lambda + 1) x_1$.

$\alpha = 2x_2 + (x_1 + 3x_3 + \cdots + n x_n) = 2x_2 + \lambda x_2 = (\lambda + 2) x_2$

$\vdots$

$\alpha = \quad - \quad\quad = (\lambda + n) x_n$.

$\alpha = \sum_{k=1}^{n} k x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} \alpha$ donc $1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k}$.

Hum. Ça fait beaucoup de divisions non justifiées.

dém { si $\lambda + 1 = 0$, alors $\alpha = 0$ donc $x_2, \ldots, x_n = 0$ puis $x_1 = 0$. Faux. Idem pour les autres

d. On a besoin de la réciproque du calcul précédent.

Si $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k}}_{f(\lambda)} = 1$, alors $\left(\frac{1}{\lambda+1}, \ldots, \frac{1}{\lambda+n}\right)$ donne un vect pr.

$f(\lambda) \xrightarrow[\lambda \to -2^{>}]{} +\infty$, $f(\lambda) \xrightarrow[\lambda \to -1^{<}]{} -\infty$ + val int $\longrightarrow$ exist

$f'(\lambda) = \sum \frac{-k}{(\lambda + k)^2} < 0 \longrightarrow$ unic.

N° .../...

$\mathbb{P}(A\cap B) - P(A)P(B)$

$a = P(A)$, $b = P(B)$, $x = P(A\cap B)$.

$P(A)P(B) = P(A\cap B)P(B) + P(A\cap\bar{B})P(B)$

$P(A\cap B)P(\bar{B})$ $\cancel{4}$ $P(A\cap\bar{B})P(B)$

	B	$\bar{B}$
A	$A\cap B$	$A\cap\bar{B}$
$\bar{A}$	$\bar{A}\cap B$	$\bar{A}\cap\bar{B}$

$u_{n+1} > u_n$ $\qquad \dfrac{u_n^2}{n+1} > u_n$

$u_n > n+1$.

$$\frac{1}{\lambda_n+1} + \frac{2}{\lambda_n+2} + \sum_{k=3}^{n}\frac{k}{\lambda+k} = 1 \qquad \frac{k}{\lambda+k} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+k}.$$

$$-\lambda_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_n+k} = 1-n \quad\Big|\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_n+k} = \frac{n-1}{\lambda_n}.$$

$$\frac{1}{\lambda_n+1} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\lambda_n+k}}_{\geq 0} = \frac{n-1}{\lambda_n} \longrightarrow -\infty$$

$$\frac{1}{\lambda_n+1} \leq \frac{n-1}{\lambda_n}$$

donc $\dfrac{1}{\lambda_n+1} \longrightarrow -\infty$ $\qquad$ donc $\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$. $\qquad \lambda_n = -1+\varepsilon_n$.

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\lambda_n+k} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\varepsilon_n+k-1} = \sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{l+\varepsilon_n}.$$

Ça vaut à peu près $\ln(n)$

donc $\dfrac{1}{\varepsilon_n} + (\sim \ln(n)) = (\sim(-n))$

Bref $\varepsilon_n \sim -\dfrac{1}{n}$ et ~~[illegible]~~

$$\boxed{\lambda_n = -1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).}$$