

**Problème I — Matrices stochastiques**

On fixe un entier  $n$  supérieur ou égal à 2.

On considère une matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que les coefficients de cette matrice sont tous *strictement* positifs. On suppose également que sur chaque ligne de cette matrice, la somme des coefficients vaut 1. En formule, cette deuxième hypothèse s'écrit

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

On note  $U$  le vecteur colonne de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients valent 1.

1. Calculer le produit  $AU$ . En déduire que 1 est une valeur propre de la matrice  $A$ .

2. Dans cette question, on étudie les valeurs propres complexes de la matrice  $A$ .

a. On considère une matrice  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et on suppose qu'elle n'est pas inversible.

On considère un élément  $X$  non nul de  $\text{Ker}(B)$ , que l'on note

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On fixe un entier  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  vérifiant l'égalité

$$|x_k| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Prouver l'inégalité

$$|b_{k,k}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} |b_{k,j}|.$$

b. Soit  $\lambda$  une valeur propre complexe de la matrice  $A$ . En appliquant le résultat précédent à la matrice  $B = A - \lambda I_n$ , obtenir l'inégalité

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq 1 - a_{k,k}$$

puis en déduire la majoration

$$|\lambda| \leq 1.$$

c. Soit  $\lambda$  une valeur propre complexe de la matrice  $A$ . On suppose que  $\lambda$  est de module 1 et on note  $\theta$  un argument de  $\lambda$ . On obtient donc l'inégalité

$$|a_{k,k} - e^{i\theta}| \leq 1 - a_{k,k}.$$

En déduire l'égalité  $\cos(\theta) = 1$  puis donner la valeur de  $\lambda$ .

3. Prouver que 1 est une valeur propre de la matrice  ${}^tA$  et que les espaces propres  $E_1(A)$  et  $E_1({}^tA)$  ont la même dimension (on pourra utiliser le théorème du rang).

4. Dans cette question, on étudie l'espace propre  $E_1({}^tA)$ .

Soit  $V$  un vecteur propre de la matrice  ${}^tA$  relatif à la valeur propre 1. On note  $v_1, \dots, v_n$  ses coefficients. On note  $|V|$  le vecteur colonne de coefficients  $|v_1|, \dots, |v_n|$ .

a. Soit  $V$  un vecteur propre de la matrice  ${}^tA$  relatif à la valeur propre 1. On note  $v_1, \dots, v_n$  ses coefficients. Pour tout indice  $i$  entre 1 et  $n$ , prouver l'inégalité

$$|v_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j|.$$

b. À l'aide de la somme  $\sum_{i=1}^n |v_i|$ , prouver que toutes ces inégalités sont en fait des égalités.

c. Prouver l'égalité  ${}^tA \times |V| = |V|$ .

d. Pour tout  $i$  dans  $[[1, n]]$ , prouver que  $|v_i|$  est strictement positif.

On a donc prouvé que tout vecteur propre de  ${}^tA$  a ses coefficients tous non nuls.

e. Soient  $X$  et  $Y$  deux éléments de l'espace propre  $E_1({}^tA)$ .

Montrer que le vecteur  $y_1X - x_1Y$  est nul.

f. Prouver que  $E_1({}^tA)$  est de dimension 1.

g. Prouver que  $E_1({}^tA)$  admet un vecteur directeur  $W$  dont les coordonnées  $w_1, \dots, w_n$  sont strictement positives et vérifient la relation

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

5. Dans cette question, on interprète la matrice  $A$  et le vecteur colonne  $W$  en termes probabilistes.

On considère un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Un personnage voyage entre  $n$  villes, numérotées de 1 à  $n$ . Chaque jour, il passe d'une ville à une autre ou il reste sur place. Ses déplacements sont fixés aléatoirement. Plus précisément, si au jour  $k$ , le personnage est dans la ville  $i$ , alors la probabilité qu'il soit dans la ville  $j$  au jour  $(k+1)$  vaut  $a_{i,j}$ .

Pour modéliser cette expérience, on fixe un entier  $N$  et on étudie les positions du personnage entre le jour 0 et le jour  $N$ . Pour tout  $k$  dans  $[[0, N]]$ , on note  $X_k$  le numéro de la ville où se trouve le personnage au jour  $k$ . On suppose que  $X_0, \dots, X_N$  sont des variables aléatoires sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ .

Pour tout  $k$  dans  $[[0, N]]$ , on code la loi de la variable aléatoire  $X_k$  par le vecteur ligne

$$L_k = (\mathbb{P}(X_k = 1) \quad \mathbb{P}(X_k = 2) \quad \dots \quad \mathbb{P}(X_k = n)).$$

a. Interpréter les  $a_{i,j}$  comme des probabilités conditionnelles. Expliquer pourquoi les hypothèses sur la matrice  $A$  sont pertinentes pour la modélisation proposée.

b. Pour tout  $k$  dans  $[[0, N-1]]$ , prouver la relation  $L_{k+1} = L_k \times A$ .

c. Prouver qu'il existe une manière (et une seule) de choisir la loi de  $X_0$  pour laquelle  $X_0, \dots, X_N$  ont toutes la même loi.

**Exercice 1. (\*\*\*)** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices diagonalisables de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Le but de cet exercice est de prouver que les trois énoncés qui suivent sont équivalents entre eux :

- (1) pour tout  $x$  dans  $\mathbb{C}$ , la matrice  $A + xB$  est diagonalisable ;
- (2) les matrices  $A$  et  $B$  commutent ;
- (3) les matrices  $A$  et  $B$  admettent une base commune de diagonalisation.

a. Justifier l'implication (3)  $\Rightarrow$  (1).

b. Soit  $M$  une matrice diagonalisable de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Montrer que si  $M$  possède une valeur propre de multiplicité 2, alors  $M$  est un multiple de  $I_2$ .

c. Dans cette question, on suppose que  $\chi_A$  possède deux racines distinctes et qu'elle commute avec  $B$ . Montrer que toute base de diagonalisation pour  $A$  en est une pour  $B$  aussi.

d. Justifier l'implication (2)  $\Rightarrow$  (3).

e. Dans cette question, on considère deux matrices  $C$  et  $D$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . On suppose que  $D$  est diagonale et que pour tout  $x$  dans  $\mathbb{C}$ , la matrice  $C + xD$  est diagonalisable. On suppose enfin que les coefficients diagonaux de  $D$  sont distincts.

Calculer le discriminant du polynôme caractéristique de  $C + xD$  et en déduire qu'il existe  $x$  dans  $\mathbb{C}$  pour lequel la matrice  $C + xD$  admet une valeur propre double.

f. Justifier l'implication (1)  $\Rightarrow$  (2).