MATHÉMATIQUES II

Notations

On désigne par $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes dont les coefficients sont des nombres complexes. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ on note ${}^tA$ la matrice transposée de A, $\overline{A}$ la matrice obtenue en conjuguant tous les coefficients de la matrice A et $rg(A)$ le rang de A.

On fixe un entier $n \geq 2$ et on considère $V = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $E = \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ munis des opérations usuelles. Les vecteurs nuls sont notés respectivement 0_V et 0_E.

L'espace vectoriel V admet pour base canonique

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $(k, m) \in [\![1, n]\!]^2$ on pose $E_{k,m} = e_k\,{}^te_m$, ce qui donne une matrice à n lignes et n colonnes dont le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 si $(i,j) = (k,m)$ et 0 sinon. La base canonique de E est constituée des n^2 matrices $E_{k,m}$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq m \leq n$.
On note I la matrice identité, $I = \sum_{1 \leq k \leq n} E_{k,k}$.

Si A est une matrice élément de E et W un sous-espace vectoriel de V, $A(W)$ désigne l'ensemble $\{Aw \mid w \in W\}$.

Si F est un sous-ensemble de E, on dit que W est stable par F si

$$\forall A \in F,\ A(W) \subset W.$$

Pour tout sous-ensemble $\mathscr{L}$ de E on s'intéresse aux propriétés suivantes :

P_1 : $\mathscr{L}$ contient (au moins) une matrice de rang 1,

P_2 : $\mathscr{L}$ contient (au moins) une matrice de rang n,

P_3 : $\mathscr{L}$ contient I,

P_4 : $\mathscr{L}$ est un sous-espace vectoriel de E,

P_5 : $\mathscr{L}$ est stable par produit de matrices : $A, B \in \mathscr{L} \Rightarrow AB \in \mathscr{L}$,

P_6 : si W est un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathscr{L}$, alors soit $W = \{0_V\}$ soit $W = V$.

Filière PC

Partie I - Étude de quelques exemples

I.A - Dans cette section I.A - , $\mathscr{L}$ est l'ensemble des $A \in E$ qui sont inversibles :

$\mathscr{L} = GL_n(\mathbb{C})$.

I.A.1) Soit x un vecteur non nul de V. Montrer que pour tout vecteur y non nul de V il existe une matrice inversible A telle que $Ax = y$.

Indication : on peut considérer deux cas,

a) la famille (x, y) est liée,

b) la famille (x, y) est libre.

En déduire que la propriété P_6 est vérifiée par $\mathscr{L}$.

I.A.2) Indiquer celles des propriétés P_1,..., P_5 qui sont vérifiées par $\mathscr{L}$; justifier les réponses.

I.B - Dans cette section I.B - , $\mathscr{L}$ est l'ensemble des matrices $T = (t_{k,m}) \in E$ qui sont triangulaires inférieures, c'est-à-dire telles que

$m > k \Rightarrow t_{k,m} = 0$

I.B.1) Montrer que e_n est vecteur propre de tout $T \in \mathscr{L}$. Que peut-on dire de la propriété P_6 pour $\mathscr{L}$?

I.B.2) Indiquer celles des propriétés P_1,..., P_5 qui sont vérifiées par $\mathscr{L}$; justifier les réponses.

I.C - Dans cette section I.C - , $n = 2$ et $\mathscr{L}$ est un sous-ensemble de E pour lequel P_3 et P_4 sont vérifiées.

I.C.1) On suppose que P_1 n'est pas vérifiée par $\mathscr{L}$ (les matrices 2×2 de rang 1 appartiennent donc toutes à $E \backslash \mathscr{L}$ le complémentaire de $\mathscr{L}$ dans E). Soit $A \in \mathscr{L}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Quelles sont les valeurs possibles du rang de $A - \lambda I$? Montrer que $\mathscr{L}$ est l'ensemble des homothéties vectorielles.

I.C.2) On suppose que P_6 est vérifiée par $\mathscr{L}$. Montrer qu'alors la propriété P_1 est vérifiée par $\mathscr{L}$.

Dans toute la suite du problème, P_4 et P_5 sont supposées vérifiées : $\mathscr{L}$ est donc un sous-espace vectoriel de E stable par produit matriciel.

Partie II -

Dans cette partie, les propriétés P_3 et P_6 sont supposées vérifiées par $\mathscr{L}$ (en plus de P_4 et P_5). On veut montrer qu'alors P_1 aussi est vérifiée.

On note

$$m = \min\left\{rg(M) \mid M \in \mathscr{L}\backslash\{0_E\}\right\},$$

et on se propose de montrer que $m = 1$, ce qui établira P_1.

On suppose dans un premier temps que $m \geq 2$. On note alors M_0 un élément de $\mathscr{L}$ qui vérifie $rg(M_0) = m$ et on considère une base $(z_i)_{1 \leq i \leq m}$ de $M_0(V)$. On note $x_1, \ldots, x_m$ des éléments de V tels que $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $M_0 x_i = z_i$.

II.A - Montrer que $\left\{N z_1 \middle| N \in \mathscr{L}\right\} = V$.

On note alors N_0 un élément de $\mathscr{L}$ qui vérifie $N_0 z_1 = x_2$ et on pose $M_1 = M_0 N_0 M_0$. Montrer que (M_0, M_1) est une famille libre.

II.B - Montrer que $M_0(V)$ est stable par $M_0 N_0$ puis que

$\exists(\alpha, z) \in \mathbb{C} \times M_0(V)$, tel que $z \neq 0_V$ et $M_0 N_0 z = \alpha z$.

En déduire que $0 < rg(M_1 - \alpha M_0) < rg(M_0)$.

Conclure que $m = 1$.

Partie III -

Dans cette partie on suppose que $n > 2$ et que la dimension de $\mathscr{L}$ est supérieure ou égale à $n^2 - 1$. On veut montrer que P_3 et P_6 sont vérifiées, puis que $\mathscr{L} = E$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'hyperplan de E stable par produit matriciel.

III.A - Soit W un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathscr{L}$; on note k la dimension de W. Montrer que $\{M \in E \mid M(W) \subset W\}$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient $\mathscr{L}$ et dont la dimension vaut $n^2 - k(n-k)$. En déduire que $W = \{0_V\}$ ou $W = V$. On a donc démontré P_6.

III.B -

III.B.1) On suppose ici : $(*) \exists k, m \in [\![1, n]\!]^2$, $k \neq m$ et $E_{k,m} \in E \backslash \mathscr{L}$.

On note alors $\mathscr{H} = \mathrm{Vect}(E_{k,m}, I)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $E_{k,m}$ et I.

Montrer que $\dim(\mathscr{H} \cap \mathscr{L}) \geq 1$ puis que $\mathscr{L}$ contient une matrice inversible.

III.B.2) On suppose ici que c'est le contraire de $(*)$ qui est vrai, donc

$$k \neq m \Rightarrow E_{k,\,m} \in \mathscr{L} .$$

Trouver une combinaison linéaire de ces $E_{k,\,m}$ qui donne une matrice inversible. En déduire que dans tous les cas $\mathscr{L}$ contient une matrice inversible A.

III.C - Montrer que pour la matrice A définie ci-dessus, la famille $\left(A, A^2, \ldots, A^{n^2+1} \right)$ est une famille liée.

En déduire qu'il existe un entier $p > 0$ et des nombres complexes $(\lambda_i)_{0 \le i \le p}$ tels que $\lambda_0 \lambda_p \neq 0$ et

$$\lambda_0 I + \lambda_1 A + \ldots + \lambda_p A^p = 0 .$$

Montrer alors que $I \in \mathscr{L}$.

On a donc démontré P_3.

Compte tenu de la partie II -, la propriété P_1 est donc satisfaite. On note alors M_0 une matrice de rang 1 qui appartient à $\mathscr{L}$, matrice que l'on peut écrire

$$M_0 = v_0 {}^t\overline{w}_0 \text{, où } v_0, w_0 \in V \setminus \{0_V\} .$$

On introduit le produit scalaire canonique sur V, $(v, w) \mapsto {}^t\bar{v} w$ et pour $v \in V$ on pose

$$A_v = \left\{ Lv \mid L \in \mathscr{L} \right\},$$

$$B_v = \left\{ {}^t\overline{L} v \mid L \in \mathscr{L} \right\},$$

$$C_v = (B_v)^{\perp} .$$

III.D - Soit $u \in V$, $u \neq 0_V$. Montrer que C_u est un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathscr{L}$ et que B_u n'est pas réduit à $\{0_V\}$.

Montrer alors que $C_u = \{0_V\}$ et $B_u = V$.

Montrer que $A_u = V$. En déduire que pour tout $(x, y) \in V^2$ il existe $L, M \in \mathscr{L}$ tels que $Lv_0 = x$ et ${}^t\overline{M} w_0 = y$, puis que toute matrice $A \in E$ de rang 1 appartient à $\mathscr{L}$. Montrer que $\mathscr{L} = E$.

••• FIN •••
