PC* **— mathématiques** **jeudi 7 décembre 2023**
Devoir surveillé n° 4 — piste bleue **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Questions de cours

Question 1. Énoncer le théorème du rang.

Question 2. Étant donné des sous-espaces vectoriels $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_p$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, rappeler la définition de « les sous-espaces vectoriels $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_p$ sont supplémentaires dans E ».

Question 3. Soit p un projecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Justifier l'égalité $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Question 4. Prouver que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{n^{7/4}}$ est convergente.

Problème 1

Soit un entier $n \geqslant 2$. On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. On note $\mathbb{O}$ la matrice nulle de E. Pour toute matrice A de E, on note $\mathrm{tr}(\mathrm{A})$ la trace de A.

Pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $\mathrm{E}_{i,j}$ la matrice élémentaire de E dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé sur la i-ième ligne et la j-ième colonne, qui vaut 1. On rappelle que la famille $(\mathrm{E}_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la base canonique de E.

On appelle *semi-norme sur* E toute application $q : \mathrm{E} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés
(S_1) $\forall \mathrm{A} \in \mathrm{E}, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \ q(\lambda \mathrm{A}) = |\lambda| q(\mathrm{A})$;
(S_2) $\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2, \ q(\mathrm{A} + \mathrm{B}) \leqslant q(\mathrm{A}) + q(\mathrm{B})$.

En somme, c'est comme une norme sauf qu'on n'impose pas la propriété de séparation.

Une *semi-norme commutative* sur E est une semi-norme q sur E qui vérifie l'identité

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2, \quad q(\mathrm{AB}) = q(\mathrm{BA}).$$

Le but de ce problème est de déterminer toutes les semi-normes commutatives sur E.

Question 5. Pour tout $(i, j, k, \ell) \in [\![1, n]\!]^4$, démontrer la relation $\mathrm{E}_{i,j} \times \mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_{j,k} \mathrm{E}_{i,\ell}$.

Question 6. Montrer qu'il n'existe pas de norme $||\cdot||$ définie sur E et vérifiant l'identité

$$\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2, \quad ||\mathrm{AB}|| = ||\mathrm{BA}||.$$

Question 7. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. On considère les matrices X et Y suivantes

$$\mathrm{X} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}_{1,j} + \sum_{i=2}^{n} \mathrm{E}_{i,i} \quad \text{et} \quad \mathrm{Y} = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r \mathrm{E}_{r,1}.$$

Calculer les produits XY et YX.

On considère maintenant une semi-norme q sur E.
Question 8. Montrer l'égalité $q(\mathbb{O}) = 0$.

Question 9. Pour toute $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$, montrer l'égalité $q(-\mathrm{A}) = q(\mathrm{A})$.

Question 10. Pour tout couple $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{E}^2$, démontrer l'inégalité $|q(\mathrm{A}) - q(\mathrm{B})| \leqslant q(\mathrm{A} + \mathrm{B})$.

Question 11. Soit $\mathrm{B} \in \mathrm{E}$ telle que $q(\mathrm{B}) = 0$. Pour toute $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$, montrer l'égalité $q(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = q(\mathrm{A})$.

Dans les deux prochaines questions, on suppose que q est une semi-norme commutative sur E.

Question 12. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, montrer que $q(\mathrm{E}_{i,j}) = 0$ (on exploitera Q5).

Question 13. En exploitant Q7, montrer l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall \mathrm{A} \in \mathrm{E}, \quad q(\mathrm{A}) = \alpha\,|\mathrm{tr}(\mathrm{A})|\,.$$

Question 14. Donner toutes les semi-normes commutatives sur E.

Problème 2

On fixe un entier n supérieur ou égal à 1. On rappelle que la notation $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout polynôme P, on note deg(P) le degré de P. Pour tout polynôme P non nul, on note cd(P) le coefficient dominant de P.

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note P_k le polynôme X^k. On note $\mathcal{B}$ la famille $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n)$ et on rappelle que c'est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

On rappelle que si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note f^k l'itérée k-ième de f. Par exemple, la notation f^3 désigne $f \circ f \circ f$.

Si f est un automorphisme de E, la notation f^{-1} désigne sa bijection réciproque et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la notation f^{-k} désigne à la fois l'itérée k-ième de f^{-1} et la bijection réciproque de f^k.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on note $\tau(\mathrm{P})$ le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$ et $\delta(\mathrm{P})$ le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$, de sorte que $\delta = \tau - \mathrm{Id}$.

L'application τ est *l'opérateur de translation* et l'application δ est *l'opérateur de différence*.

Partie 1 — L'opérateur de translation

Question 15. Pour tout polynôme P non nul de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, exprimer $\deg(\tau(\mathrm{P}))$ en fonction de deg(P) et exprimer $\mathrm{cd}(\tau(\mathrm{P}))$ en fonction de cd(P).

Question 16. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression du polynôme $\tau^k(\mathrm{P})$.

Question 17. Montrer que τ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et exprimer sa réciproque τ^{-1}.

Question 18. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression du polynôme $\tau^{-k}(\mathrm{P})$.

Question 19. On note M la matrice de τ dans la base $\mathcal{B}$. Ses coefficients sont notés $(\mathrm{M}_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$. Les indices sont numérotés à partir de 0 par souci de cohérence avec les termes de la base $\mathcal{B}$.

Exprimer les coefficients $\mathrm{M}_{i,j}$.

Question 20. Les coefficients de la matrice M^{-1} sont notés $((\mathrm{M}^{-1})_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$. Exprimer $(\mathrm{M}^{-1})_{i,j}$.

Question 21. On considère une suite réelle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et on définit une suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en posant

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j.$$

Trouver une matrice Q de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $\begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \mathrm{Q} \times \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.

Question 22. En déduire la formule d'inversion

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j.$$

Partie 2 — L'opérateur de différence

Question 23. Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$. Exprimer $\deg(\delta(P))$ et $\mathrm{cd}(\delta(P))$ en fonction de $\deg(P)$ et de $\mathrm{cd}(P)$.

Question 24. En déduire le noyau et l'image de δ.

Question 25. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, prouver les égalités $\mathrm{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$ et $\mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$.

Question 26. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ. On suppose que F n'est pas réduit à $\{0\}$. On considère alors un élément de P non nul de F de degré maximal, noté d.

Q26a. On note $\mathcal{F}$ la famille $(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P))$. Montrer que cette famille est libre.

Q26b. Quel est l'espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F}$?

Q26c. Prouver l'égalité $F = \mathbb{R}_d[X]$.

Question 27. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. On fait l'hypothèse $u \circ u = \delta$.

Q27a. Montrer que u et δ commutent.

Q27b. En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u.

Q27c. On note $\tilde{u}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$ induit par u et on note A sa matrice relativement à la base $(1, X)$ de $\mathbb{R}_1[X]$.
Que vaut la matrice A^2 ?

Q27d. Obtenir une contradiction.

Q27e. Que peut-on en déduire ?

Problème 3

On fixe a et b dans $\mathbb{R}$ et on les suppose distincts. On introduit le polynôme

$$P = (X - a)^2(X - b).$$

On considère un espace vectoriel réel E et un endomorphisme f de E.

Le but de ce problème est de montrer l'égalité

$$\mathrm{Ker}(P(f)) = \mathrm{Ker}((f - a\mathrm{Id}_E)^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - b\mathrm{Id}_E)$$

et d'appliquer ce résultat dans deux cadres familiers.

Question 28. Trouver $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant l'égalité polynomiale suivante

$$\lambda(X - a)^2 + \mu(X - a)(X - b) + \nu(X - b) = 1.$$

Question 29. Montrer que les sous-espaces vectoriels de E définis par

$$F = \mathrm{Ker}((f - a\mathrm{Id}_E)^2) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Ker}(f - b\mathrm{Id}_E)$$

sont en somme directe.

Question 30. Montrer ensuite l'égalité annoncée.

Question 31. Dans cette question, on prend $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et l'endomorphisme $D : y \mapsto y'$ de E.

Résoudre l'équation différentielle

$$y''' - 3y' + 2y = 0$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Question 32. Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R}^\mathbb{N}$, c'est-à-dire le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles, et on le munit de l'endomorphisme de décalage

$$\sigma : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Trouver toutes les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+3} + 2u_{n+2} - 4u_{n+1} - 8u_n = 0.$$
