

Exercice 1. (*) Déterminer les éléments propres des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables sur \mathbb{R} ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On donne $\chi_C = X^3 + X^2 - 10X + 8$ et $\chi_D = X^3 - 7X^2 + 16X - 12$.

Exercice 2. (*) On fixe un entier $n \geq 2$. La matrice I_n est notée I .

a. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Déterminer ses éléments propres. Est-elle diagonalisable ?

b. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on note $M(a, b)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients diagonaux valent a , les autres valent b . Montrer que $M(a, b)$ est diagonalisable et calculer son déterminant.

c. Exprimer les puissances de $M(a, b)$ comme combinaison linéaire de I et J

Exercice 3. ()** Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie.

On note \tilde{f} l'endomorphisme de $\text{Im}(f)$ induit par f .

a. Montrer que les valeurs propres non nulles de f sont exactement les valeurs propres non nulles de \tilde{f} .

b. Soit λ une éventuelle valeur propre non nulle de f . Montrer alors l'égalité $E_\lambda(f) = E_\lambda(\tilde{f})$.

Exercice 4. (*) Dans cet exercice, l'entier n est supérieur ou égal à 3. On pose $M = (\delta_{i,n} + \delta_{j,n})_{1 \leq i, j \leq n}$.

a. Déterminer le noyau de M . Qu'en déduit-on sur les éventuelles valeurs propres non nulles de M ?

b. On considère l'endomorphisme $\varphi : U \mapsto MU$ de $\text{Im}(M)$.

Écrire la matrice de φ relativement à une base bien choisie de $\text{Im}(M)$. En déduire les éléments propres de φ .

c. Montrer que la matrice M est diagonalisable et proposer une matrice de passage.

Exercice 5. (*) Soit un entier $n \geq 2$. On pose $f(P) = (X^2 - X)P(1) + (X^2 + X)P(-1)$ pour tout P dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. Déterminer son noyau, son image, ses éléments propres. Est-il diagonalisable ?

Exercice 6. ()** On fixe un entier n strictement positif.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\Phi(P) = X(X + 1)P' - nXP$.

a. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Déterminer les éléments propres de Φ . Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Exercice 7. (*) À quelle condition la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 8. (*) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on considère la matrice $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les valeurs de z pour lesquelles $\chi_{M(z)}$ admet des racines multiples.

b. Déterminer les valeurs de z pour lesquelles $M(z)$ est diagonalisable.

Exercice 9. (*) On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que f n'est pas diagonalisable mais qu'il est trigonalisable.

b. On admet que f^3 est l'endomorphisme nul. Comment peut-on le montrer ?

c. Soit x_0 un vecteur de \mathbb{R}^3 tel que $f^2(x_0)$ soit non nul. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

d. Quelle est la matrice de f relativement à une telle base ? Trouver un vecteur x_0 convenable et préciser la matrice de passage associée.

Exercice 10. ()** On considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, que l'on suppose triangulaire. On suppose que les coefficients diagonaux sont donnés par

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_{k,k} = \exp\left(i \frac{(2k+1)\pi}{n}\right).$$

Déterminer la matrice A^n .

Exercice 11. (*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On fait l'hypothèse $A^2 + I_n = 0$. Montrer que n est pair et que la trace de A est nulle. Que vaut le déterminant de A ?

Exercice 12. (*) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant les relations $A^4 = A^2$ et $\{-1, 1\} \subset \text{Sp}(A)$. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 13. (*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $A^3 = A^2 - 2A$. Montrer que le rang de A est pair.

Exercice 14. (*) Déterminer toutes les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui vérifient les égalités $M^5 = M^2$ et $\text{tr}(M) = n$.

Exercice 15. (*) Soit (a_0, \dots, a_{n-1}) dans \mathbb{K}^n . On pose $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et on lui associe la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

a. Montrer que le polynôme caractéristique de A est le polynôme P . Pour le calculer, on effectuera une seule opération sur les colonnes.

b. Calculer la dimension des espaces propres de A .

c. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, le polynôme P est scindé à racines simples.

Exercice 16. ()** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a. Soit λ dans \mathbb{C} . Trouver un isomorphisme entre $\text{Ker}(B - \lambda I_{2n})$ et $\text{Ker}(A - \lambda^2 I_n)$.

b. Montrer que B est diagonalisable si, et seulement si, la matrice A est diagonalisable et inversible.

Exercice 17. (*) Soient A et M deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On fait l'hypothèse $M^2 + M = A$.

a. Montrer que M laisse stables les espaces propres de A .

b. On suppose que A est diagonalisable et que ses espaces propres sont de dimension 1. Montrer que toute base de diagonalisation de A en est une aussi pour M . Préciser les liens entre les valeurs propres de A et celles de M .

c. Résoudre l'équation $M^2 + M = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dans le cas $A = \begin{pmatrix} -30 & -24 \\ 48 & 38 \end{pmatrix}$.

Exercice 18. (*) Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que f est diagonalisable. Montrer l'égalité

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2).$$

Exercice 19. ()** Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que f^2 est diagonalisable. On suppose aussi que l'égalité

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$$

est vraie.

Montrer alors que f est diagonalisable. Trouver un contre-exemple si on enlève cette condition.

Exercice 20. ()** Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On veut prouver que les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

a. Montrer que c'est vrai dans le cas où A est inversible.

b. On revient au cas général. On fixe $\lambda \in \mathbb{C}$ et on pose $f(z) = \det(\lambda I_n - (A - zI_n)B) - \det(\lambda I_n - B(A - zI_n))$ pour tout z dans \mathbb{C} .

Montrer que f est le polynôme nul. Conclure.

Exercice 21. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables qui commutent.

Montrer qu'il existe une base de diagonalisation commune à A et B .

Exercice 22. (*)** Montrer par récurrence sur n l'énoncé suivant : pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent deux à deux, il existe une base de diagonalisation commune à toutes les A_i .

Pour l'hérédité, on distinguera selon que les A_i sont toutes des matrices scalaires ou non.

Exercice 23. (*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit Φ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\Phi_A : M \mapsto AM$.

Montrer que si A est diagonalisable, alors Φ_A l'est aussi. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 24. ()** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable.

a. Décrire l'ensemble $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) ; AM = MA\}$, appelé *commutant* de A . On montrera que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on exprimera sa dimension en fonction des dimension des espaces propres de A .

b. Décrire l'ensemble des solutions de l'équation $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 25. ()** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable (sur \mathbb{R}).

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède des solutions est que pour toute valeur propre λ strictement négative de A (s'il en existe), la dimension de l'espace propre associé soit paire.

Exercice 26. (*) On note E_n l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que E_n est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.