

**Exercice 1. (\*)** Montrer que la fonction  $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-n^2 x}}{n^2 + 1}$  est définie et continue sur  $[0, +\infty[$ .

**Exercice 2. (\*)** Pour tout  $x$  réel et tout entier  $n$  strictement positif, on pose  $f_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x^2}{k^2}\right)$ .

Montrer que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$  continue. Pour cela, on se ramènera à l'étude d'une série de fonctions.

**Exercice 3. (\*)** Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  et tout  $x$  dans  $[0, +\infty[$ , on pose

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

a. Justifier que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[0, +\infty[$ . On note  $f$  la somme de cette série de fonctions.

b. Cette série de fonctions converge-t-elle normalement sur  $[0, +\infty[$ ? sur les segments inclus dans  $[0, +\infty[$ ?

c. Converge-t-elle uniformément sur  $[0, +\infty[$ ? sur les segments inclus dans  $[0, +\infty[$ ?

d. La fonction  $f$  est-elle continue sur  $[0, +\infty[$ ? est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$ ?

**Exercice 4. (\*\*)** On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2 x}.$$

a. Montrer que la fonction  $f$  est définie et continue sur  $]0, +\infty[$ .

b. Prouver la relation

$$f(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

c. À l'aide d'un encadrement par des intégrales, trouver un équivalent de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers 0.

**Exercice 5. (\*\*)** On pose

$$f_n(x) = \frac{\text{Arctan}(nx)}{n^2} \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}.$$

a. Montrer que la fonction  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

b. Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

c. Trouver la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

d. On se propose de prouver que la fonction  $f$  n'est pas dérivable en 0. On raisonne par l'absurde en supposant que  $f$  est dérivable en 0.

Prenons  $N$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Pour tout  $x > 0$ , prouver l'inégalité

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq \sum_{n=1}^N \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x}.$$

Qu'obtient-on en faisant tendre  $x$  vers 0 par valeurs strictement positives? Conclure.

e. Trouver un équivalent de  $f'(x)$  quand  $x$  tend vers 0.

**Exercice 6.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on pose  $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ .

1. Prouver que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$ . Sa somme est notée  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .
3. Prouver que  $f$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  et exprimer son intégrale sous la forme d'une somme de série.
4. La fonction  $f$  est-elle intégrable sur  $]0, +\infty[$  ?
5. Vérifier que  $f$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ . Que dire de ses limites aux bornes ?
6. Trouver un équivalent de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers 0.

**Exercice 7. (\*)** Pour tout  $(n, p)$  de  $\mathbb{N}^2$ , on pose  $I(n, p) = \int_0^1 t^n (\ln(t))^p dt$ .

- a. Montrer que ces intégrales existent.
- b. Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  et tout  $p$  dans  $\mathbb{N}^*$ , trouver une relation entre  $I(n, p)$  et  $I(n, p - 1)$ .
- c. En déduire une expression explicite de  $I(n, p)$ .

d. Prouver l'égalité  $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ .

e. Prouver l'égalité  $\int_0^1 x^x dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^k}$ .

**Exercice 8. (\*\*)** Prouver l'égalité  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{ch}(x)} dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ .

**Exercice 9. (\*\*)** Soit  $t \in \mathbb{R}$ . On veut prouver l'égalité  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tu)}{e^u - 1} du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t}{t^2 + n^2}$ .

- a. **Première méthode.** Passer par les sommes partielles avec le théorème de convergence dominée.
- b. **Deuxième méthode.** Appliquer le théorème d'intégration terme à terme. Sous l'hypothèse  $t > 0$ , on écrira

$$\int_0^{+\infty} |\sin(tu)| e^{-ku} du = \int_0^{\pi/t} |\sin(tu)| e^{-ku} du + \int_{\pi/t}^{+\infty} |\sin(tu)| e^{-ku} du.$$

et on majorera  $|\sin(tu)|$  par 1 ou  $|tu|$  selon ce qui est le plus pertinent.

**Exercice 10. (\*\*)** On considère une série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  absolument convergente et on pose  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ .

- a. Montrer que  $S$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .
- b. Prouver l'égalité

$$\int_0^{+\infty} S(x) e^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$